

两点法边角后方交会的直接解算及其实际应用

王勇¹ 周健² 文华³

山东建勘集团有限公司 山东 济南 250031

山东鲁岩勘测设计有限公司 山东 济南 250031

山东建勘集团有限公司 山东 济南 250031

摘要: 本文介绍了双点边角后方交会的直接解法, 该法具有简便、可行且点位精度能满足工程测量要求的特点。同时对测站点的测设提出一些实用的建议, 供参考。

关键词: 双点边角后方交会、直接解法、实际应用、建议。

引言

利用两个以上已知控制点确定两个待定点的双点后方交会作为控制网点的加密, 是一种比较有利和方便的方法。尤其随着全站仪的普及应用, 采用双点边角后方交会法, 则更显出其优越方便之处, 这种加密布设不仅布点灵活、方便, 还具有精度优良的特点。可以在城市与工程测量控制网加密中予以广泛应用。

正如所知, 对于双点边角交会网(点)其角度观测值是以角秒为单位, 而其边长观测值则是以长度为单位, 两者是属于两类量纲, 当采用边角统一平差时, 应选用恰当的定权方式, 才可获得满意的平差结果, 且平差计算过程也比较繁冗。为了简化计算, 本文给出了一种直接、简便, 且能获得满意结果的直接解算方法。同时对实际应用提出一些建议, 供参考。

1 基本原理

1.1 基本网形

根据两个以上已知控制点(控制点之间可以不通讯), 以边角后方交会的网形, 布设加密控制网(点) P_1 和 P_2 。这样便具有如图1-图6几种常用的网形。

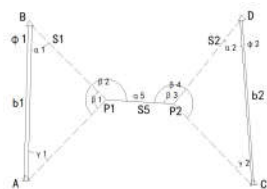


图1

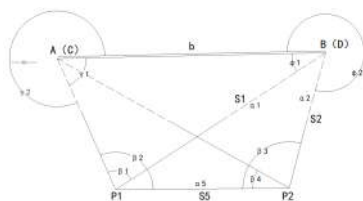


图2

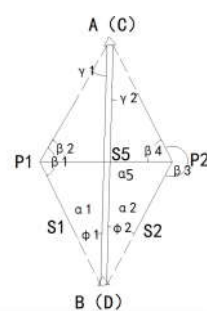


图3

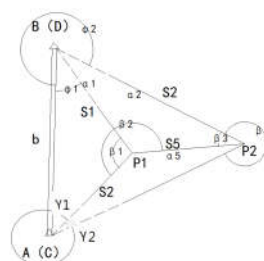


图4

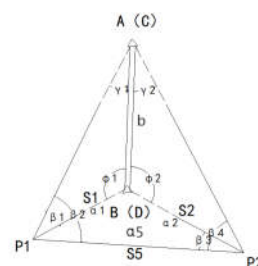


图5

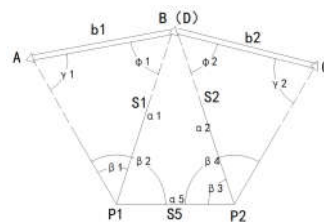


图6

现就直接解算方法详细论述于后。

1.2 双点边角后方交会网（点）的直接计算

对于所布置的图1-图6的双点边角后方交会网形，可以认定为是测角后方交会网（点）和测边后方交会网（点）的组合。于是依文献^[5、6]可以认知，测角后方交会网（点）和测边后方交会网（点）所得的点位可以相当于独立观测的函数，从纯量意义上来说，边角交会网（点），大约相当于测角交会网（点）和测边交会网（点）的加权平均值，而其点位误差也应是两者的加权平均值。

这样如前述，对于如图1-图6的双点边角后方交会网（点）的计算，则可分解为双点测角后方交会网（点）和双点测边后方交会网（点）分别进行表述。

（1）双点测角后方交会网（点）的计算

为便于推导和运用，现以图1的交会网形作为基本图形进行论述。

如图7，图中A、B、C、D为已知控制点，P₁和P₂为两个待定的后方交会点。依图，观测了β₁、β₂、β₃、β₄各观测角，见图7所示，依双点测角后方交会法加以解算。这样根据文献^[3]依图7可以写出关系式如下：

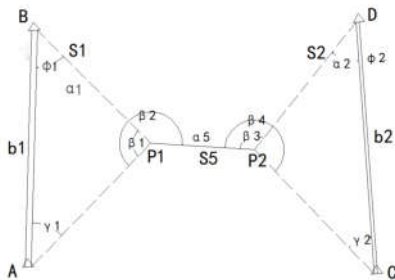


图7

$$\gamma_1 + \gamma_2 - \varphi = 0 \quad (1)$$

$$S_1 \cos \alpha_1 + S_5 \cos \alpha_5 + S_3 \cos \alpha_3 + \Delta X_{DB} = 0 \quad (2)$$

$$S_1 \sin \alpha_1 + S_5 \sin \alpha_5 + S_3 \sin \alpha_3 + \Delta Y_{DB} = 0 \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta X_{DB} &= S_{CA} \cos T_{CA} \\ \Delta Y_{DB} &= S_{CA} \sin T_{CA} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_5 &= T_{AB} + \gamma_1 + \beta_2 - 180^\circ \\ \alpha_1 &= T_{AB} + \gamma_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 &= \alpha_5 + \beta_3 - 180^\circ \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\varphi = 540^\circ - \beta_2 - \beta_4 + T_{DC} - T_{BA} \quad (6)$$

这里T_{DB}为已知点D至B方向的坐标方位角，α₁、α₂、α₅分别为B-P₁、P₂-D和P₁-P₂的方位角。

这样，在（2）式中乘以sinα₅与（3）式中乘以cosα₅后相减便有

$$S_1 \sin(\alpha_5 - \alpha_1) + S_2 \sin(\alpha_5 - \alpha_2) + S_{BD} \sin(T_{BD} - \alpha_5) = 0 \quad (7)$$

由（5）式可得

$$\left. \begin{aligned} \alpha_5 - \alpha_1 &= \beta_2 - \beta_1 - 180^\circ \\ \alpha_5 - \alpha_2 &= 180^\circ - \beta_3 \\ T_{BD} - \alpha_5 &= \omega - \gamma_1 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\text{而 } \omega = T_{BD} - T_{BA} - \beta_2 \quad (9)$$

把（8）式代入（7）式后便有

$$-S_1 \sin(\beta_2 - \beta_1) + S_2 \sin \beta_3 + S_{BD} (\sin \omega \cos \gamma_1 - \cos \omega \sin \gamma_1) = 0 \quad (10)$$

依图7可写出

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= b_1 \frac{\sin \gamma_1}{\sin \beta_1} \\ S_2 &= b_2 \frac{\sin \gamma_2}{\sin(\beta_4 - \beta_3)} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

把（11）式代入（10）后，由于γ₂ = φ - γ₁，则sinγ₂ = sinφcosγ₁ - cosφsinγ₁

这样经归项整理便可写出

$$-\kappa_1 \sin \gamma_1 + \kappa_2 \sin \varphi \cos \gamma_1 - \kappa_2 \cos \varphi \sin \gamma_1 + S_{BD} (\sin \omega \cos \gamma_1 - \cos \omega \sin \gamma_1) = 0 \quad (12)$$

式中令

$$\left. \begin{aligned} \kappa_1 &= b_1 \frac{\sin(\beta_2 - \beta_1)}{\sin \beta_1} \\ \kappa_2 &= b_2 \frac{\sin \beta_3}{\sin(\beta_4 - \beta_3)} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

展开（12）式并经归项整理可得

$$t_g \gamma_1 = \frac{\kappa_1 \sin \varphi + S_{BD} \sin \omega}{\kappa_1 + \kappa_2 \cos \varphi + S_{BD} \cos \omega} \quad (14)$$

同理，在（8）式的第三式中顾及（1）式，并设θ = ω - φ，则有T_{BD} - α₅ = θ + γ₂以及γ₁ = φ - γ₂代入上列各式经综合整理后可得^[3]

$$t_g \gamma_2 = \frac{\kappa_1 \sin \varphi - S_{BD} \sin \theta}{\kappa_1 \cos \varphi + \kappa_2 + S_{BD} \cos \theta} \quad (15)$$

这里可依（1）式和（6）式进行计算校核。

这里应该指出，γ₁和γ₂角依其不同的交会网形，其角值可在0-360°范围内变动。而当γ₁和γ₂等于或接近90°或270°时（此种情况在实地选点时可以预知），应将（14）式和（15）式变换为ct_gγ₁和ct_gγ₂的形式计算。如果γ₁ = γ₂ = 0时，该问题无解，应予避免。

这里还应该就实际应用中作如下说明：

为使（14）式和（15）式具有通用性，则对待定点上的观测方向值和待求角γ₁和γ₂的方向顺序作以下规定：

β₁为待定点P₁上视准A点顺时针向至B点的方向值；

β_2 为待定点 P_1 上视准A点顺时针向至 P_2 点的方向值;
 β_3 为待定点 P_2 上视准 P_1 点顺时针向至D点的方向值;
 β_4 为待定点 P_2 上视准 P_1 点顺时针向至C点的方向值;
 γ_1 为已知点A上自 \overline{AB} 方向顺时针向至 $\overline{AP_1}$ 方向的角度值;
 γ_2 为已知点C上自 $\overline{CP_2}$ 方向顺时针向至 \overline{CD} 方向的角度值;

对图2-图6几种常见双点测角后方交会网形的应用;
 正如前述,为了使解算公式具有统一性,在解算时各方向角值都应按上述的编序原则排序。

对于图2-图6的交会网形,由于设定D点与B点重合,则 $S_{BD}=0$ 。这时令

$$\kappa = \frac{\kappa_1}{\kappa_2} = \frac{b_1 \sin(\beta_2 - \beta_1) \sin(\beta_4 - \beta_3)}{b_2 \sin\beta_1 \sin\beta_3} \quad (16)$$

于是(14)式和(15)式便可写成

$$t_g \gamma_1 = \frac{\sin\varphi}{\kappa + \cos\varphi} \quad (17)$$

$$t_g \gamma_2 = \frac{\kappa \sin\varphi}{1 + \kappa \cos\varphi} \quad (18)$$

因此可以看出,图2-图6的网形是图1(或图7)的几种特例。这里还应指出,当求算出的 γ_1 和 γ_2 角出现负值时,则应根据交会网形的实际情况来判定其实际的角度值。

依前述,这里再依图7,并令 $\angle P_1BA = \varphi_1$, $\angle CDP_2 = \varphi_2$, 则有 $\varphi_1 = 180^\circ - (\gamma_1 + \beta_1)$; $\varphi_2 = 180^\circ - [(\beta_4 - \beta_2) + \gamma_2]$ 。这样在求算出 φ_1 和 φ_2 后便可采用在已知点A(C)和B(D)上的角度前方交会法公式即通称的余切公式(亦称戎格公式)直接求算 P_1 和 P_2 点的坐标。为方便计算本文建议采用经改进的余切公式直接计算,依图7其计算式为下:

对于(19)和(20)式中交会点A、B上的交会角,应根据不同的网形,按前述规则,取用在A、B点上自己知方向顺时针向至交会点方向的方向角值,参与计算。

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= \frac{S_5 \sin\beta_2}{\sin^2(\beta_2 + \beta_4)}; K_2 = \frac{S_5 \sin\beta_4}{\sin^2(\beta_2 + \beta_4)} \\ K_3 &= \frac{S_5 \sin(360^\circ - \beta_3)}{\sin^2[(360^\circ - \beta_3) + (\beta_1 - \beta_2)]}; K_4 = \frac{S_5 \sin(\beta_1 - \beta_2)}{\sin^2[(360^\circ - \beta_3) + (\beta_1 - \beta_2)]} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

而 m_{β} —测角中误差(依仪器的标称精度)。

(2) 双点测边后方交会的计算

如图8, A、B、C为已知控制点, P_1 和 P_2 为待定点, S'_1, S'_2, S'_3, S'_4 和 S'_5 为量测边。这样分别以 $\triangle ABP_1$ 和 $\triangle BC P_2$, 采用二边交会方法直接计算出 P_1 和 P_2 点的近似坐标 $(X_{P_1}^o, Y_{P_1}^o)$ 和 $(X_{P_2}^o, Y_{P_2}^o)$, 这样当采用间接观测平差时, 这里便存在一个多余观测值, 于是可写出改正数方程式如下:

$$\left. \begin{aligned} X_{P_1}^{\text{角}} &= \frac{X_A t_g \gamma_1 - X_B t_g (360^\circ - \varphi_1) - Y_A + Y_B}{t_g \gamma_1 - t_g (360^\circ - \varphi_1)} \\ Y_{P_1}^{\text{角}} &= \frac{Y_A t_g \gamma_1 - Y_B t_g (360^\circ - \varphi_1) - X_A - X_B}{t_g \gamma_1 - t_g (360^\circ - \varphi_1)} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$$\left. \begin{aligned} X_{P_2}^{\text{角}} &= \frac{X_C t_g (360^\circ - \gamma_2) - X_D t_g \varphi_2 - Y_C + Y_D}{t_g \gamma_2 - t_g \varphi_2} \\ Y_{P_2}^{\text{角}} &= \frac{Y_C t_g (360^\circ - \gamma_2) - Y_D t_g \varphi_2 + X_C - X_D}{t_g (360^\circ - \gamma_2) - t_g \varphi_2} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

这里应该说明, 由于原有的余切(戎格)公式, 在计算时要遵循两个已知点A、B与待定点P之间, 保持逆时针的顺序, 即 $A \rightarrow B \rightarrow P$ 的顺序, 方可解算出正确的结果。而改进后的余切公式(19)式和(20)式与原有余切公式不同之处在于: 其一, 已知点与待定点之间的顺序无需一定要遵循逆时针向的排序。其二, 原有的余切(戎格)公式其交会角采用的是已知点上的前方交会角, 而改进后的余切公式则是用在已知点上以已知边为起始方向至待定点方向的方向角值。

待定点 P_1, P_2 的点位中误差计算如下:

依文献^[3]有

$$\left. \begin{aligned} m_{P_1}^{\text{角}} &= \frac{S_1 + S_2}{S_1 + S_2 + S_{\frac{m_{\beta}}{\rho''}}} \cdot \frac{S_{\frac{m_{\beta}}{\rho''}} \cdot m_{T_{\frac{m_{\beta}}{\rho''}}}}{\rho''} \\ m_{P_2}^{\text{角}} &= \frac{S_3 + S_4}{S_3 + S_4 + S_{\frac{m_{\beta}}{\rho''}}} \cdot \frac{S_{\frac{m_{\beta}}{\rho''}} \cdot m_{T_{\frac{m_{\beta}}{\rho''}}}}{\rho''} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

式中 $m_{T_{\frac{m_{\beta}}{\rho''}}}$ 为 $\overline{P_1 P_2}$ 边的方位角中误差, 而

$$m_{T_{\frac{m_{\beta}}{\rho''}}} = \frac{S_5 m_{\beta}}{S_{AB} \rho''} \sqrt{K_1^2 \sin^2 \gamma_1 + K_2^2 \sin^2 \gamma_1 + K_3^2 \sin^2 \varphi_1 + K_4^2 \sin^2 \varphi_2} \quad (22)$$

式中

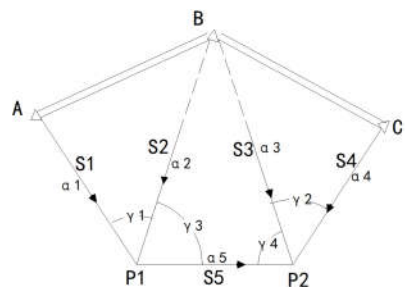


图8

$$\begin{bmatrix} V_{S_1} \\ V_{S_2} \\ V_{S_3} \\ V_{S_4} \\ V_{S_5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 & 0 & 0 \\ \cos\alpha_2 & \sin\alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha_3 & \sin\alpha_3 \\ 0 & 0 & \cos\alpha_4 & \sin\alpha_4 \\ -\cos\alpha_5 & -\sin\alpha_5 & \cos\alpha_5 & \sin\alpha_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dy_1 \\ dx_2 \\ dy_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ l_5 \end{bmatrix} \quad (24)$$

式中 $\alpha_1-\alpha_5$ 为 S_1-S_5 各边的近似的方位角，通过近似坐标反算求得，其方向如图8中标示，而 $l_5 = S_5^{\circ} - S_5'$ (S_5° 由 P_1 和 P_2 点的近似坐标反算而得近似边长)。

依(24)式便组成法方程式如下：

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 \\ +\cos^2\alpha_5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \cos\alpha_1\sin\alpha_1 \\ +\cos\alpha_2\sin\alpha_2 \\ +\cos\alpha_5\sin\alpha_5 \end{pmatrix} & -\cos^2\alpha_5 & -\cos\alpha_5\sin\alpha_5 \\ \begin{pmatrix} \cos\alpha_1\sin\alpha_1 \\ +\cos\alpha_2\sin\alpha_2 \\ +\cos\alpha_5\sin\alpha_5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \sin^2\alpha_1 + \sin^2\alpha_2 \\ +\sin^2\alpha_5 \end{pmatrix} & -\sin\alpha_5\cos\alpha_5 & -\sin^2\alpha_5 \\ -\cos\alpha_5 & -\cos\alpha_5\sin\alpha_5 & \begin{pmatrix} \cos^2\alpha_3 + \cos^2\alpha_4 \\ +\cos^2\alpha_5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \cos\alpha_3\sin\alpha_3 \\ +\cos\alpha_4\sin\alpha_4 \\ +\cos\alpha_5\sin\alpha_5 \end{pmatrix} \\ -\sin\alpha_5\cos\alpha_5 & -\sin\alpha_5 & \begin{pmatrix} \cos\alpha_3\sin\alpha_3 \\ +\cos\alpha_4\sin\alpha_4 \\ +\cos\alpha_5\sin\alpha_5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \sin^2\alpha_3 + \sin^2\alpha_4 \\ +\sin^2\alpha_5 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} dx_1 \\ dy_1 \\ dx_2 \\ dy_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\cos\alpha_5 l_5 \\ -\sin\alpha_5 l_5 \\ \cos\alpha_5 l_5 \\ \sin\alpha_5 l_5 \end{bmatrix} = 0 \quad (25)$$

为简化法方程式(25)的解算，这里令

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha_5 & \sin\alpha_5 & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \cos\alpha_5 & \sin\alpha_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dy_1 \\ dx_2 \\ dy_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -l_5 \\ l_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda l_5 \\ \eta l_5 \end{bmatrix} \quad (26)$$

再引入符号

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{\eta} = \delta x_1; \frac{dy_1}{\eta} = \delta y_1 \\ \frac{dx_2}{\lambda} = \delta x_2; \frac{dy_2}{\lambda} = \delta y_2 \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

而后通过相应置换整理便可写出直接解算式如下^[3]

$$\left. \begin{aligned} \delta x_1 = + \frac{l_5 [\sin\alpha_1 \sin(\gamma_1 + \gamma_3) + \sin\alpha_2 \sin\gamma_3]}{N_1} \\ \delta y_1 = - \frac{l_5 [\cos\alpha_1 \sin(\gamma_1 + \gamma_3) + \cos\alpha_2 \sin\gamma_3]}{N_1} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta x_2 = - \frac{l_5 [\sin\alpha_3 \sin\gamma_4 + \sin\alpha_4 \sin(\gamma_2 + \gamma_4)]}{N_2} \\ \delta y_2 = + \frac{l_5 [\cos\alpha_3 \sin\gamma_4 + \cos\alpha_4 \sin(\gamma_2 + \gamma_4)]}{N_2} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

$$\text{式中} \left. \begin{aligned} N_1 = \sin^2\gamma_1 + \sin^2(\gamma_1 + \gamma_3) + \sin^2\gamma_3 \\ N_2 = \sin^2\gamma_2 + \sin^2(\gamma_2 + \gamma_4) + \sin^2\gamma_4 \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

依(27)式有

$$\left. \begin{aligned} dx_1 = \eta \delta x_1; dy_1 = \eta \delta y_1 \\ dx_2 = \lambda \delta x_2; dy_2 = \lambda \delta y_2 \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

利用(28)、(29)式和(30)式计算的结果并依(31)式代入(26)式便可写出^[3]

$$\left. \begin{aligned} \lambda \cos\alpha_5 \delta x_2 + \lambda \sin\alpha_5 \delta y_2 + l_5 = +\eta l_5 \\ \eta \cos\alpha_5 \delta x_1 + \eta \sin\alpha_5 \delta y_1 - l_5 = -\lambda l_5 \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

这里令

$$\left. \begin{aligned} \cos\alpha_5 \delta x_1 + \sin\alpha_5 \delta y_1 = K_1 \\ \cos\alpha_5 \delta x_2 + \sin\alpha_5 \delta y_2 = K_2 \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

于是(32)式便写成

$$\left. \begin{aligned} \lambda K_2 + l_5 = \eta l_5 \\ \lambda K_1 - l_5 = -\lambda l_5 \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

依此便解得

$$\left. \begin{aligned} \eta = \frac{l_5^2 + l_5 K_2}{l_5^2 + K_1 K_2} \\ \lambda = \frac{l_5^2 - l_5 K_1}{l_5^2 + K_1 K_2} \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

这样利用(28)、(29)式和(30)式以及(33)、(35)式计算的结果代入(31)式便可直接算出待定点 P_1 和 P_2 近似坐标的改正数 dx_1, dy_1 和 dx_2, dy_2 ，于是便有

$$\left. \begin{aligned} X_{P_1}^{\text{边}} = X_{P_1}^{\circ} + dx_1 \\ Y_{P_1}^{\text{边}} = Y_{P_1}^{\circ} + dy_1 \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

$$\left. \begin{aligned} X_{P_2}^{\text{边}} &= X_{P_2}^{\circ} + dx_2 \\ \text{和} \quad Y_{P_2}^{\text{边}} &= Y_{P_2}^{\circ} + dy_2 \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

然后再将 dx_1 , dy_1 和 dx_2 , dy_2 代入(24)式, 便可求得各观测边的边长改正数 V_{S_i} , 于是平差后的各边边长为

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= S'_1 + V_{S_1} \\ S_2 &= S'_2 + V_{S_2} \\ S_3 &= S'_3 + V_{S_3} \\ S_4 &= S'_4 + V_{S_4} \\ S_5 &= S'_5 + V_{S_5} \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

正如所知, 对于双点测边后方交会, 除图8的网形外, 在实际作业中尚常见有下列几种网形, 如(图9—图13)

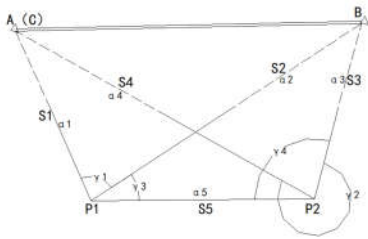


图9

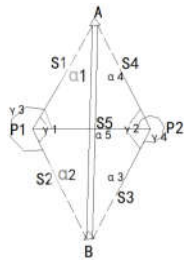


图10

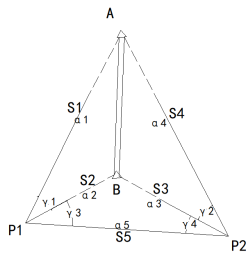


图11

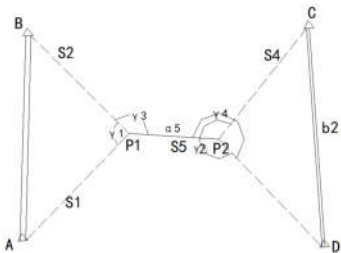


图12

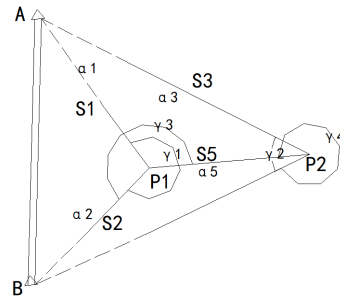


图13

这里应该指出, 为了使前面所推导的公式对各类交会网形在计算时具有通用性, 这里对 γ_1 , γ_2 , γ_3 , γ_4 各角的方向顺序作如下统一规定:

γ_1 角为在 P_1 点上自 S_1 边顺时针向至 S_2 边;

γ_2 角为在 P_2 点上自 S_3 边顺时针向至 S_4 边;

γ_3 角为在 P_1 点上自 S_2 边顺时针向至 S_5 边;

γ_4 角为在 P_2 点上自 S_5 边顺时针向至 S_3 边。

关于 P_1 和 P_2 点点位中误差计算式^[3]为:

$$m_{P_1}^{\text{边}} = m_0 \sqrt{\frac{2N_2 + \sin^2 \gamma_1}{N_2 \sin^2 \gamma_1 + G_1 \sin^2 \gamma_2}} \quad (39)$$

$$\text{和} \quad m_{P_2}^{\text{边}} = m_0 \sqrt{\frac{2N_1 + \sin^2 \gamma_1}{N_1 \sin^2 \gamma_2 + G_2 \sin^2 \gamma_1}} \quad (40)$$

这 m_0 为边长观测值单位权中误差

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{V_{S_i}^2}{\eta - \tau}} \quad (41)$$

式中 V_{S_i} —各观测边的边长改正数;

η —改正式方程式的数目(即观测边的个数)

τ —未知数的个数

上式中, N_1 , N_2 即(30)式的计算值, 而

$$\left. \begin{aligned} G_1 &= \sin^2 \gamma_3 + \sin^2 (\gamma_1 + \gamma_3) \\ G_2 &= \sin^2 \gamma_4 + \sin^2 (\gamma_2 + \gamma_4) \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

公式的推导过程参见文献^[3], 这里从略。

(1) 双点边角后方交会法待定点 P_1 和 P_2 的最终坐标及其点位中误差的直接计算

如前述依文献^[5, 6]可以写出

待定点 P_1 和 P_2 的测角后方交会和测边后方交会所得坐标的权分别为

$$\left. \begin{aligned} P_1^{\text{角}} &= \frac{1}{(m_{P_1}^{\text{角}})^2}; \quad P_1^{\text{边}} = \frac{1}{(m_{P_1}^{\text{边}})^2} \\ P_2^{\text{角}} &= \frac{1}{(m_{P_2}^{\text{角}})^2}; \quad P_2^{\text{边}} = \frac{1}{(m_{P_2}^{\text{边}})^2} \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

而双点边角交会点 P_1 和 P_2 的坐标计算式分别为

$$\left. \begin{aligned} X_{P_1} &= \frac{P_{P_1}^{\text{角}} X_{P_1}^{\text{角}} + P_{P_1}^{\text{边}} X_{P_1}^{\text{边}}}{P_{P_1}^{\text{角}} + P_{P_1}^{\text{边}}} \\ Y_{P_1} &= \frac{P_{P_1}^{\text{角}} Y_{P_1}^{\text{角}} + P_{P_1}^{\text{边}} Y_{P_1}^{\text{边}}}{P_{P_1}^{\text{角}} + P_{P_1}^{\text{边}}} \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

$$\left. \begin{aligned} X_{P_2} &= \frac{P_{P_2}^{\text{角}} X_{P_2}^{\text{角}} + P_{P_2}^{\text{边}} X_{P_2}^{\text{边}}}{P_{P_2}^{\text{角}} + P_{P_2}^{\text{边}}} \\ Y_{P_2} &= \frac{P_{P_2}^{\text{角}} Y_{P_2}^{\text{角}} + P_{P_2}^{\text{边}} Y_{P_2}^{\text{边}}}{P_{P_2}^{\text{角}} + P_{P_2}^{\text{边}}} \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

式中： $X_{P_1}^{\text{角}}$ 、 $Y_{P_1}^{\text{角}}$ 和 $X_{P_2}^{\text{角}}$ 、 $Y_{P_2}^{\text{角}}$ 为(19)和(20)式计算的测角后方交会的 P_1 和 P_2 点的坐标；

$X_{P_1}^{\text{边}}$ 、 $Y_{P_1}^{\text{边}}$ 和 $X_{P_2}^{\text{边}}$ 、 $Y_{P_2}^{\text{边}}$ 为(36)和(37)式计算的测边后方交会的 P_1 和 P_2 点的坐标。

而 P_1 和 P_2 点的点位中误差计算式分别为

$$M_{P_1} = \frac{m_{P_1}^{\text{角}} \times m_{P_1}^{\text{边}}}{\sqrt{(m_{P_1}^{\text{角}})^2 + (m_{P_1}^{\text{边}})^2}} \quad (46)$$

$$M_{P_2} = \frac{m_{P_2}^{\text{角}} \times m_{P_2}^{\text{边}}}{\sqrt{(m_{P_2}^{\text{角}})^2 + (m_{P_2}^{\text{边}})^2}} \quad (47)$$

这样利用前述的(21)和(39)、(40)分别计算的点位中误差代入(46)和(47)式便可求得双点边角后方交会待定点 P_1 和 P_2 的最终点位中误差值。

结束语

综上所述可以看出，双点边角后方交会点随着两待定点与已有控制点的相对关系可有多种的布网形式。因此在布设上具有方便、灵活和作业量少的优点，文中所列的几种常见网形，一般在保证测角和测边精度的情况下都能获得较好的点位精度，可据实选用。

本文所介绍的双点边角法后方交会的直接解算方法，具有简便、明晰的优点，其最终结果还具有综合测角网和测边网各自对于点位误差有利方向互补的特点。因此能具有有效地提高点位精度的效果，保证了最终的结果精度能满足一定的要求。

为了保证双点边角后方交会网(点)具有较好的点位精度，这里在布设上提出一些建议：双点边角后方交会点的点位精度，与交会网形和四个交会角，尤其与已知边所对的交会角大小密切相关。在两待定点上向两控制点的方向之间的交会不宜过锐或过钝，一般以 40° — 150° 之间为宜。而待定点的精度还与两待定点之间的边长大小有关。随着边长的增大其待定点的精度则会有所降低。从实用上来说，为了充分发挥点位效果，其待定点之间的边长，亦不宜过短，一般而言，其边长以等于 $0.5S$ — $2.0S$ 为宜(S 为已知边长度)。

总之，只要布网图形选择适当、合理，双点边角后方交会法一般都可以获得满足相应精度的要求。

参考文献

- [1] GB 50026-2020, 工程测量标准[S].
- [2] CJJ/T 8-2011, 城市测量规范[S].
- [3] 严伯铎. 工程测量应用技术论文集[M]. 山东省地图出版社, 1998.
- [4] 陶本藻. 边角网平差若干实际问题[J]. 测绘通报, 1981, 000(005):3-9.
- [5] 顾孝烈, 洪炳隆, 杨子龙, 等. 工程边角控制网的精度分析[J]. 工程勘察, 1981, 000(001):3-10.
- [6] 顾孝烈. 平面控制网的布设[J]. 城乡测绘, 1986, 000(001).