发展学生核心素养 感悟数学思想方法
——高一指数运算的教学设计与思考

游敬敬
天津市复兴中学 天津 300121

摘 要：本文以《n次方根与分数指数幂》的教学设计为例，分析在n次方根、根式与分数指数幂概念的教学中，主要运用的类比、转化与化归、一般与特殊的数学思想方法；在分数指数幂及其性质的应用中，培养学生的数学运算素养。

关键词：指数运算；数学思想方法；数学运算

新课程标准、新教材（人民教育出版社）从2019年开始在天津实行，课标中明确指出“落实立德树人”的根本任务，2019版教材以学生发展为本，学科内容有删改，课程内容的设置也有调整。数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算和数据分析作为学科核心素养，贯穿高中课程，通过具体的课程内容发展和落实；在新课标、新教材背景下以数学知识为载体，分类讨论、一般与特殊、类比法、分析法等思想方法是解决问题的途径和手段，感悟数学[1]。

2019年人教版教材《高中数学必修一》，4.1.1《n次方根与分数指数幂》，主要内容是n次方根、根式和分数指数幂及其性质[2]。指数运算虽然只有两课时，但是该内容在数列、导数运算和二项式定理中的应用，是对知识的进一步的温习巩固，加深对知识的理解和技能的掌握。在上述知识应用指数运算时，学生对知识理解和技能应用过程中出现的偏差，促进我们反思：高一指数运算的备课和教学环节中，如何优化设计教学设计和习题。

以下是笔者在高一指数运算第一课时的教学设计：

1 教学目标

1.了解n次方根的概念和性质，感受特殊与一般、分类讨论的思想方法。

2.理解根式的概念及性质，体会特殊与一般、分类讨论的思想方法，培养学生的数学运算素养。

3.通过实例理解分数指数幂的概念；掌握分数指数幂的运算性质，应用中体会类比的方法、一般与特殊的数学思想，培养学生的数学运算素养。

2 教学重难点

教学重点：分数指数幂运算性质的应用

教学难点：理解分数指数幂的概念

3 教学过程设计

3.1 复习整数指数幂的概念及运算性质

1. a^n（$n\in N^*$）的含义是什么，a^{-n}呢？a^0=?

2. 整数指数幂的运算性质

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n}(m,n\in Z)$$
$$(a^m)^n=a^{mn}(m,n\in Z)$$
$$(ab)^n=a^n\cdot b^n(n\in Z)$$

3. 平方根、立方根

如果$x^2=a$，那么x叫做a的平方根。

如果$x^3=a$，那么x叫做a的立方根。

师：咱们同学来想想两个平方根、两个立方根的例子。

生甲：正负4是16的平方根，正负5是25的平方根。

生乙：-5是-125的立方根，-6是-216的立方根。

【设计意图】幻灯片呈现1、2、3内容。复习整数幂及其运算性质、平方根与立方根的定义，让学生举例唤醒学生该知识的记忆，让学生举平方根、立方根的例子，激发学生学习的兴趣，以便将方根的概念推广到n次方根。

3.2 n次方根与根式的概念

师：有了平方根、立方根，同学们能不能给出四次方根、五次方根的定义？请同学们给出定义并举例说明。

生丙：如果$x^4=a$，那么x叫做a的四次方根。例如正负2是16的四次方根。

生丁：如果$x^5=a$，那么x叫做a的五次方根.例如-2是-32的五次方根。

师：咱们同学回答得很棒，老师给大家点赞。现在有平方根、立方根、四次方根和五次方根，那么n次方根又怎样定义？

生：如果$x^n=a$，则x叫做a的n次方根。

师：很好，基本正确，同学们！严谨起见，我们要求n是大于1的自然数，定义的前面加上“一般地”。

教师板书定义如下：

1. n次方根

（1）定义：一般地，若$x^n=a(n>1,n\in N^*)$ 则x叫做a的n次方根。

通过前面的例子，我们可以得到

（2）n次方根的性质：①当n是奇数时，正数a的n次方根是一个正数，负数a的n次方根是一个负数。符号：$\sqrt[n]{a}$

②当n是偶数时，正数a的n次方根有两个，这两个数互为相反数。符号：$\pm\sqrt[n]{a}$

负数a没有n次方根（n为偶数）

③ 0的任何次方根都是0，符号：$\sqrt[n]{0}$

【设计意图】将四次方根、五次方根的概念推广到n次方根，让学生通过两个特例归纳得到n次方根的方法；通过前面的例子归纳出n次方根的性质，再次渗透特殊到一般的思想方法。一方面，n次方根的性质将n分为奇数、偶数、0三类，从中体会分类讨论的思想；另一方面，当n是偶数和奇数时，顺承了平方根、三次方根的性质，学生比较容易理解。此外，n次方根实现由数到式的推广，由数的性质到式的性质的推广，这是数式通性在该部分中的体现。

2. 根式

（1）定义：$\sqrt[n]{a}$叫做根式，n叫做根指数，a叫做被开方数。

练习（幻灯片呈现）求值：

（1）$\sqrt[3]{(-2)^3}$　　（2）$\sqrt[3]{2^3}$

（3）$\sqrt{(-10)^2}$　　（4）$\sqrt{10^2}$

小组讨论，快速得结果。

师：当根指数n不为0时，$\sqrt[n]{a^n}=?$

（停顿）得到的结果是a吗？小组讨论。

生：分类讨论。

师：怎么分类？

生：分为n是奇数、偶数两类。

学生回答，教师引导，归纳性质。

（2）性质：

当n为奇数时，$\sqrt[n]{a^n}=a$；

当n为偶数时，$\sqrt[n]{a^n}=|a|=\begin{cases}a,\ a\geq 0\\ -a,a<0\end{cases}$

师：请同学们根据根式的性质完成下面的题目。

例1求下列各式的值：

（1）$\sqrt[3]{-64}$　　（2）$\sqrt[4]{(3-\pi)^4}$　　（3）$\sqrt{(a-b)^2}$

【设计意图】在n次方根的基础上给出根式的概念，以问题为载体，通过二次方根和三次方根的练习，启发学生得到根式的性质，感受由数到式的推广，体会由特殊到一般的数学思想。例1是根式性质的应用，（1）-（3）的设计是由数到字母，逐步推进，学生自主完成（1）（2），（3）引导学生意识到需要讨论a-b的符号，教师板书解答过程；该例题的解答体现一般到特殊的过程，学生再次体会特殊→一般→特殊的认识世界和分析问题的方法，会求根式的值，培养学生的数学运算素养。

3.3 分数指数幂的概念

师：a的算术平方根、立方根，能不能用指数运算的形式来表示？

也就是$\sqrt{a}=a^?$，$\sqrt[3]{a}=a^?$

师：回忆算数平方根、立方根的例子，

表1 算数平方根（幻灯片呈现）

	a^2	a^4	a^6	a
算数平方根	a	a^2	a^3	$\sqrt{a}$
观察得规律	$a=\left(a^2\right)^{\frac{1}{2}}$	$a^2=\left(a^4\right)^{\frac{1}{2}}$	$a^3=\left(a^6\right)^{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{a}=?$

表2 立方根（幻灯片呈现）

	a^3	a^6	a^9	a
立方根	a	a^2	a^3	$\sqrt[3]{a}$
观察得规律	$a=\left(a^3\right)^{\frac{1}{3}}$	$a^2=\left(a^6\right)^{\frac{1}{3}}$	$a^3=\left(a^9\right)^{\frac{1}{3}}$	$\sqrt[3]{a}=?$

生：$\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$，$\sqrt[3]{a}=a^{\frac{1}{3}}$

师：类比a的算数平方根、立方根的指数幂表示，a的正n次方根$\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$。

表1（续） 算数平方根（幻灯片呈现）

	a^2	a^4	a^6	a	a^3
算数平方根	a	a^2	a^3	$\sqrt{a}$	$\sqrt{a^3}$
观察得规律	$a=\left(a^2\right)^{\frac{1}{2}}$	$a^2=\left(a^4\right)^{\frac{1}{2}}$	$a^3=\left(a^6\right)^{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{a^3}=a^?$

表2（续） 立方根（幻灯片呈现）

	a^3	a^6	a^9	a	a^2
立方根	a	a^2	a^3	$\sqrt[3]{a}$	$\sqrt[3]{a^2}$
观察得规律	$a=\left(a^3\right)^{\frac{1}{3}}$	$a^2=\left(a^6\right)^{\frac{1}{3}}$	$a^3=\left(a^9\right)^{\frac{1}{3}}$	$\sqrt[3]{a}=a^{\frac{1}{3}}$	$\sqrt[3]{a^2}=a^?$

由表1（续）、表2（续）可知$\sqrt{a^3}=a^{\frac{3}{2}}$，$\sqrt[3]{a^2}=a^{\frac{2}{3}}$，类似地得到$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$

仿照负整数指数幂，正数的负分数指数幂能用根式表示？$a^{-\frac{m}{n}}=?$

生：$a^{-\frac{m}{n}}=\dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$。

教师得到正数的分数指数幂的定义，板书：

3. 分数指数幂的定义

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}\quad (a>0,\ m,n\in N^*,n>1)$$

$$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}\quad (a>0,\ m,n\in N^*,n>1)$$

0的正分数指数幂等于0，0的负分数指数幂没有意义。

练习1根式与分数指数幂的互化：

（1）用根式的形式表示下列各式（$a>0$）

$$a^{\frac{1}{2}}\qquad a^{\frac{3}{4}}\qquad a^{-\frac{3}{5}}\qquad a^{-\frac{2}{3}}$$

（2）用分数指数幂的形式表示下列各式

$$\sqrt[3]{x^2}\,(x>0)\qquad \sqrt[5]{(a-b)^4}\,(a>b)$$

【设计意图】通过算术平方根的例子，观察规律得算术平方根可表示为被开方数的同底数幂，指数为原来的$\frac{1}{2}$；立方根可表示为被开方数的同底数幂，指数为原来的$\frac{1}{3}$；进而推广到$\sqrt[n]{a}$为被开方数的同底数幂，指数为原来的$\frac{1}{n}$。进而得到正数的正分数指数幂，即$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$，类比负整数指数幂得到正数的负分数指数幂的意义。分数指数幂定的定义，采用了特殊到一般的方法，实现分数指数幂与根式的互相转化，并设置了对应的练习1，实践出真知，使学生在练习过程中学会分数指数幂与根式的互相转化。分数指数幂作为高中课程的新运算，本课时由n次方根→根式→分数指数幂的思路展开，为后面的无理数指数幂、对数运算打好基础[3]。

3.4 分数指数幂的运算性质及应用

师：整数指数幂的运算性质同样适用于分数指数幂。教师板书运算性质

4.分数整数幂的运算性质

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n}(a>0,m,n\in Q)$$

$$(a^m)^n=a^{mn}(a>0,m,n\in Q)$$

$$(ab)^n=a^n\cdot b^n(a>0,b>0,n\in Q)$$

例2求值：（1）$8^{\frac{2}{3}}$ （2）$\left(\frac{16}{81}\right)^{-\frac{3}{4}}$

练习2求值：（1）$\left(\frac{36}{49}\right)^{\frac{3}{2}}$

（2）$\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\cdot\left(2\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}-\left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$

（3）$2\sqrt{3}\times 3\sqrt[3]{1.5}\times\sqrt[6]{12}$

（4）$\left(\sqrt{2}-1\right)^0-\sqrt[3]{25}\div\sqrt[4]{25}$

例3计算下列各式（式中字母均是正数）

（1）$a^2\cdot\sqrt[3]{a^2}$ （2）$\sqrt{a\sqrt[3]{a}}$

（3）$\left(2a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}}\right)\left(-6a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}\right)\div\left(-3a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{5}{6}}\right)$

（4）$\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt{a^3}\right)\div\sqrt[4]{a^2}$

练习3计算下列各式（式中字母均是正数）

（1）$\sqrt{p^6}\sqrt{p^5}$ （2）$\frac{a^3}{\sqrt{a}}$

（3）$\left(m^{\frac{1}{4}}n^{-\frac{3}{8}}\right)^8$ （4）$2x^{-\frac{1}{3}}(\frac{1}{2}x^{\frac{1}{3}}-2x^{-\frac{2}{3}})$

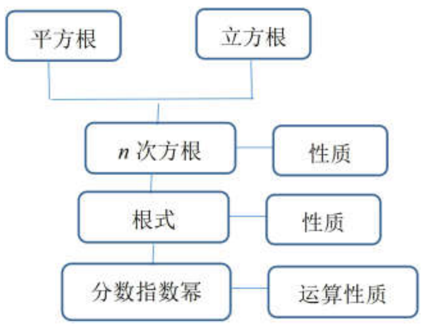
【设计意图】分数指数幂的运算性质及其应用是本节的重点，笔者将教材中的例3和例4进行整合，适当调整练习题。教学设计中的例2和练习2是底数为数时分数指数幂性质的应用；例3和练习3时底数为字母时分数指数幂性质的应用。例2中的题是单个数的分数指数幂性质的应用；练习2设置（1）是单个数的分数指数幂性质的应用；（2）（3）（4）为分数指数幂的计算，运算顺序为：根式→负分数指数幂→正分数指数幂→乘除→加减。例3中的（1）（2）和练习3中的（1）（2）是单一字母的分数指数幂的乘除运算，转化为底数不变，指数相加减的幂运算，（3）是两个字母的性质的应用，（4）虽然是单一字母的运算，但是增加了加减运算。例题和习题的编排，从单一数（或字母）的分数指数幂的运算，过渡到两个分数指数幂的乘除运算，再到单一字母的指数运算与四则运算的综合，由易到难，顺应学生的思维发展。以指数运算为载体，通过例题和练习发展学生的数学运算素养，经历根式到分数指数幂的转化，感受转化与化归的思想方法。

3.5 课堂小结

1.今天我们学习了哪些概念及其性质?

2.我们是如何探究这些概念的？其中包含什么数学思想方法？

师生共同总结：



【设计意图】引导学生总结本节课的知识，以及探究知识过程中的思想方法，建立分数指数幂的知识脉络。体会本节课中类比的方法，理解分数指数幂运算性质的应用是一般到特殊的数学思想，通过根式、分数指数幂的运算，进一步培养学生的数学运算素养。

4 教学思考

本课引入分数指数幂的概念时，用表格的形式（表1，表2）引导学生观察前两行的规律，写出第三行，自然而然得到分数指数幂的定义，经历发现分数指数幂的过程，提高学生学习的积极性[4]。这个设计的启发来自两位数学巨匠——牛顿和欧拉，恰巧笔者阅读有关指数幂的数学史，获悉早在三四百年前，牛顿在与友人通信中将$\sqrt{a},\sqrt{a^3}$（$a>0$）表示为$a^{\frac{1}{2}},a^{\frac{3}{2}}$的形式，欧拉用类比法将分数指数幂引出。笔者觉得这样引入分数指数幂概念，顺应学生的思维，起到较好的教学效果。

本节课由n次方根到根式，再到分数指数幂，将指数幂的运算性质由整数推广到分数，学生容易感受到认知的共鸣。而具体到分数指数幂的运算性质的应用，学生难免会出现问题，促使我们思考：是分数指数幂的概念不理解？在应用时三条运算性质中的哪条出现问题或困难？如何解决？值得继续探究。

发展学生的数学核心素养，感悟数学思想方法，是贯穿整个高中数学教学的过程，以具体的数学知识为载体逐步培养和发展起来的。在数学教学活动中，将培养学生的数学核心素养和感悟数学思想方法作为教学目标，结合教学内容进行教学设计和作业作业，使得学生数学核心素养的发展得到落实，为学生之后的学习奠定基础。

参考文献

[1]中华人民共和国教育部制定.普通高中数学课程标准（2017年版2020年修订）[M].北京：人民教育出版社，2020.5.

[2]教育部基础教育课程教材专家工作委员会.普通高中数学课程标准（2017年版2020年修订）解读[M].北京：高等教育出版社，2020.11.

[3]人民教育出版社,课程教材研究所,数学课程教材研究开发中心.普通高中教科书数学必修第一册[M].北京：人民教育出版社，2020.5.

[4]郑吉星.高中优秀教案志宏优化系列丛书 数学必修1[M].海口：南方出版社，2020.5.

[5]石明荣.“核心素养”中“数学运算”素养的内涵与实践研究[J].中学数学(高中)，2017,3:26-27.