高中数学立体几何中的向量应用

陆丽敏
银川高级中学 宁夏 银川 750001

摘 要：高中数学立体几何中，向量方法的应用极大地简化了证明与求解过程。向量可用于证明线线、线面、面面之间的平行与垂直关系，提供了直观且严谨的几何证明方法。向量在求解立体几何角度方面也具有显著优势，能够准确求解异面直线所成角、直线与平面所成角以及二面角。其中法向量法和面积射影法是求解二面角的两种常用方法，分别适用于不同情境。向量方法的应用使得立体几何问题的解决更加高效和准确。

关键词：高中数学；立体几何；向量应用

引言

立体几何作为高中数学的核心内容，涵盖了空间图形的性质、位置关系及度量等多个方面。然而，传统的几何证明方法往往显得繁琐且难以直观理解，给学生的学习带来了不小的挑战。幸运的是，向量方法的引入为立体几何问题的解决带来了革命性的变化。向量不仅具有明确的代数表示，还能直观反映空间图形的几何特征，为立体几何的证明与求解提供了全新的视角和方法，极大地简化了问题解决的步骤，提高了学生的解题效率。

1 向量在立体几何证明中的应用

1.1 证明线线平行与垂直

向量在立体几何中对于证明线线平行和垂直有着独特的作用。在证明线线平行时，我们聚焦于直线的方向向量，以正方体为例，正方体的每条棱都有其特定的方向向量，这个方向向量是由棱在空间中的位置所确定的，当我们要判断两条棱是否平行时，只需查看它们的方向向量[1]。如果其中一条棱的方向向量是另一条棱方向向量的某个倍数，这就意味着这两条棱是平行的。这种基于向量关系的判断方式，与我们传统依靠图形直观想象的方法不同。它不需要我们在脑海中构建复杂的空间图形来推测两条直线是否平行，而是通过精确的向量计算和关系来确定，大大提高了判断的准确性和效率。而在证明线线垂直方面，向量的数量积成为了核心要素。比如在三棱锥这样的立体图形中，当我们要证明其中两条棱垂直时，首先要做的是求出这两条棱的方向向量。这需要依据三棱锥顶点和棱的位置关系来确定。之后，计算这两个方向向量的数量积。一旦数量积的值为零，就能够确凿地证明这两条棱是垂直的。这种利用向量数量积的方法，巧妙地避开了复杂的几何定理推导过程。传统方法可能需要运用多个几何定理，经过多步推理才能得出结论，而向量方法仅需简单的向量计算，极大地简化了证明过程，为我们解决立体几何中的线线垂直问题提供了便捷途径。

1.2 证明线面平行与垂直

在立体几何中，向量为证明线面平行与垂直提供了清晰有效的途径。对于线面平行的证明，主要有两种向量方法。其一，利用直线方向向量与平面法向量的关系。平面的法向量垂直于该平面，若直线的方向向量与平面法向量的数量积为零，这意味着直线与平面法向量垂直，从而直线与平面平行。其二，在平面内寻找两个不共线向量。若直线的方向向量可以由这两个平面内向量线性表示，那么直线与该平面平行。以长方体为例，长方体是规则图形，其顶点坐标容易确定，相应向量也容易求出。当要证明某条棱与某个面平行时，我们通过求出相关向量，然后运用上述方法进行判断。这种利用向量关系的证明方式，相较于传统方法，充分利用了长方体的规则性，避免了复杂的空间想象和几何关系推导，使证明过程更加简便快捷。在证明线面垂直时，核心思路是直线方向向量与平面法向量的平行关系。在棱锥或棱柱这类立体几何问题中，我们首先要确定直线和平面各自的相关向量。当直线的方向向量与平面的法向量平行时，直线必然垂直于这个平面。在处理复杂的立体几何图形时，这种基于向量的方法优势明显。传统方法可能需要大量的辅助线构造和复杂的几何定理运用，而向量方法只需关注向量之间的关系，能迅速帮助我们找到证明的方向，大大简化了证明过程，提高了解题效率。

1.3 证明面面平行与垂直

（1）对于面面平行，关键在于两个平面的法向量。平面的法向量是垂直于该平面的向量，它能很好地体现平面的特性，当我们尝试证明两个平面平行时，只需对它们的法向量进行比较，若两个法向量存在倍数关系，

就意味着这两个平面是平行的[2]。以棱柱为例，棱柱作为一种规则的立体几何图形，在判断其两个侧面是否平行时，利用向量法十分便捷。我们首先建立合适的空间坐标系，这需要依据棱柱的形状和已知条件来确定原点、坐标轴方向等。接着，通过棱柱的顶点坐标求出两个侧面的法向量。由于棱柱的规则性，这个过程相对简便。求出法向量后，观察它们是否存在倍数关系，若有，则可确定两个侧面平行。这种向量方法绕开了传统几何证明中复杂的推理和想象过程，在处理棱柱这类规则图形的面面平行问题时，效果非常显著，能让我们更高效地得出结论。（2）在证明面面垂直方面，核心是两个平面法向量的数量积。当两个平面的法向量数量积为零时，这两个平面就是垂直的。在棱锥中，当判断两个相邻面是否垂直时，可运用此原理。我们根据棱锥的几何结构，比如顶点位置、棱的连接关系等，来确定两个相邻面的法向量。然后计算这两个法向量的数量积。若数量积为零，就能够证明这两个相邻面是垂直的。这种方法无需像传统几何证明那样，去寻找复杂的线面关系、构建辅助线等，大大简化了证明过程，使面面垂直的证明更加简洁，提高了我们解决立体几何问题的效率。

2 向量在立体几何角度求解中的应用

2.1 求异面直线所成角

在立体几何中，求异面直线所成角是一个重要的问题，而向量法为我们提供了一种有效的解决途径。当我们利用向量来求解异面直线所成角时，核心是抓住异面直线的方向向量，通过计算这两个方向向量夹角的余弦值，为确定异面直线所成角奠定基础[3]。然而需要注意的是，向量夹角的范围是$[0,\pi]$，但异面直线所成角的范围是（$0,\pi/2$]，这就要求我们在计算出向量夹角余弦值后，要根据异面直线所成角的范围进行合理调整。以正四面体为例，在这个典型的几何图形中求异面棱所成角时，这种向量方法就大显身手。我们要依据正四面体顶点和棱的位置关系来确定异面直线的方向向量。正四面体具有规则的几何结构，其顶点和棱的相对位置明确，这为我们确定方向向量提供了便利条件。我们可以通过建立简单的空间坐标关系，或者利用向量的加减法，根据已知的正四面体边长等条件，准确地表示出异面直线的方向向量。在确定了异面直线的方向向量后，接下来就可以按照向量夹角余弦值的计算方法进行求解。这个计算过程涉及向量的数量积公式以及向量模长的计算。在计算过程中，要确保计算的准确性，特别是对于向量坐标的运算和三角函数值的求解。根据异面直线所成角的范围对计算结果进行调整。如果计算出的向量夹角余弦值为负，那么异面直线所成角应该取其绝对值，因为异面直线所成角是锐角或直角。这种利用向量求异面直线所成角的方法，不仅在正四面体中适用，对于其他复杂的立体几何图形，只要能准确确定异面直线的方向向量，都可以用此方法求出异面直线所成角，为解决立体几何中的角度问题提供了有力的工具。

2.2 求直线与平面所成角

在立体几何的研究中，求直线与平面所成角是常见且重要的问题，而向量方法为此提供了便捷高效的途径。第一，直线与平面所成角的求解关键在于利用直线的方向向量和平面的法向量。直线方向向量表征了直线的走向，平面法向量则垂直于平面，这两个向量之间的关系为求解角度搭建了桥梁。具体而言，我们通过计算直线方向向量与平面法向量夹角的正弦值，来获取直线与平面所成角的正弦值。第二，在面对各种立体几何问题时，首先要做的是依据图形中顶点、棱、面的复杂位置关系确定直线方向向量和平面法向量。这一过程需要对立体几何图形有清晰的认识。例如在三棱柱中，若要求某条侧棱与底面所成角，我们可以根据三棱柱的几何特征，以底面三角形的某个顶点为坐标原点建立空间直角坐标系，进而通过各顶点坐标确定侧棱的方向向量，再根据底面平面的性质求出其法向量。在更复杂的棱锥结构中，同样需要深入分析棱锥顶点与各面、棱的位置关联，从而准确地确定相应向量。第三，在确定了直线方向向量和平面法向量后，便利用向量的数量积公式等向量关系来计算夹角的正弦值。这其中涉及到向量坐标运算，通过计算向量的模长和它们的数量积，代入公式得到正弦值。有了正弦值后，再结合直线与平面所成角的范围（通常为$[0,\pi/2]$），可以通过反三角函数求出直线与平面所成角的具体值。这种基于向量的求解方法，将原本抽象、依赖空间想象和复杂几何关系推导的直线与平面所成角问题，转化为了具体的向量运算。它极大地降低了问题的难度，避免了繁琐的几何构造和推理过程，使得求解直线与平面所成角这一问题变得更加容易和直观，无论是简单的几何模型还是复杂的立体图形，都能发挥其优势。

2.3 求二面角

2.3.1 法向量法

在求解二面角的问题中，法向量法是一种极为重要的手段。通过两个平面的法向量来确定二面角，这种方法为复杂的二面角求解带来了清晰的思路。首先需要求出两个平面的法向量。在棱柱、棱锥等不同的几何图形中，要根据各自的图形特点来建立合适的空间坐标系。

例如在长方体棱柱中，可以利用其棱与面的垂直关系，以某个顶点为原点，棱所在直线为坐标轴建立坐标系。对于三棱锥，可以根据底面三角形的特殊性质（如直角三角形的直角顶点等）来确定原点和坐标轴方向。在建立好坐标系后，依据平面内向量的关系求出平面的法向量。求出两个平面的法向量后，接着计算它们夹角的余弦值。这里有一个关键的问题需要注意，即计算得到的法向量夹角余弦值并不一定就是二面角的余弦值。因为法向量的方向有两种可能，所以这个余弦值可能与二面角的余弦值相等，也可能互为相反数。这时，就需要根据二面角是锐角还是钝角来判断。可以通过观察图形，在二面角内找一个特殊点，看这个点相对于两个法向量的位置关系，或者根据两个平面在空间中的大致位置关系来确定。这种法向量法在处理复杂的二面角问题时，优势明显。它无需像传统方法那样构建复杂的几何辅助线，也不需要去推导大量复杂的几何关系，大大简化了求解过程。

2.3.2 面积射影法（当已知一个面在另一个面上的射影时可用）

面积射影法在求解立体几何中的二面角问题时，提供了一种独特且有效的解决途径，特别是在已知一个面在另一个面上的射影的情况下，该方法的核心在于利用射影面积与原面积之间的比值关系，来求解二面角的余弦值[4]。在实际应用中，面积射影法展现出其独特的优势。当面对一些特殊的立体几何问题时，如一个平面与另一个平面垂直相交，且其中一个面在另一个面上的投影形状规则、面积易于计算时，这种方法就显得尤为实用。通过计算投影面积与原面积的比值，我们可以直接得出二面角的余弦值，从而快速求解出二面角的大小。使用面积射影法求解二面角的过程中，首先需要建立适当的坐标系，并根据已知条件确定图形中各点的坐标。接着，利用这些点坐标求出相关直线的方向向量和平面的法向量等关键信息。在此过程中，要充分利用图形的几何性质和已知条件，确保坐标和向量的准确计算。与传统的向量方法相比，面积射影法避免了复杂的向量计算和几何构造，使得求解过程更加简洁明了。同时，该方法也充分利用了面积的比例关系，使得求解结果更加准确可靠。在解决立体几何中的二面角问题时，面积射影法为我们提供了一种更为高效和便捷的求解途径。

结语

综上，向量在高中数学立体几何中扮演着至关重要的角色。它不仅简化了繁琐的证明过程，提高了证明效率，还准确解决了立体几何中的各类角度问题。通过向量方法，学生能以更直观、更生动的方式理解立体几何，从而培养他们的空间想象能力和逻辑推理能力。掌握向量方法在立体几何中的应用，不仅能够提升学生的数学素养，还能为他们未来的学习和职业发展奠定坚实的基础。因此，这一方法的学习和应用具有深远的意义。

参考文献

[1]叶晶晶.高中数学立体几何的解题技巧及应用实践[J].数理天地（高中版）,2024(19):52-53.

[2]吴焱焱.高中数学立体几何教学中向量法的应用[J].数学大世界（中旬版）,2020(12):92,95.

[3]张家豪.例举向量外积在高中数学中的应用[J].数理天地（高中版）,2023(1):17-18.

[4]郁雪珂.向量法在求解立体几何问题中的多重应用[J].数理天地（高中版）,2024(3):14-15.