

利用马尔可夫链分析多次试验下的状态转移概率

陈希超 袁 超

威海经济技术开发区博思高考教育培训学校 山东 威海 264209

摘 要: 马尔可夫链核心是“无记忆性”，即未来状态仅依赖当前状态，与过去无关，是分析预测动态系统的强大工具。本文探讨如何用马尔可夫链理论对多次独立试验下的状态序列建模，分析状态转移概率。先阐述其基本概念、数学定义及状态空间、一步转移概率矩阵等核心要素；接着论述从有限观测数据中估计转移概率的方法，如最大似然估计法，还讨论数据稀疏性挑战及平滑技术等解决方案；随后推导多步转移概率计算原理，引入查普曼-柯尔莫哥洛夫方程并展示计算过程；探讨其长期行为，包括稳态分布相关内容及状态分类；最后通过案例展示应用流程与价值。研究表明，它为理解量化状态转移规律提供严谨高效直观框架，有重要指导意义。

关键词: 马尔可夫链；状态转移概率；多次试验；最大似然估计

引言

现实世界中，众多领域存在随时间演变的动态系统，它们在不同时刻呈现不同状态，如金融市场的股价涨跌、气象学的天气变化等。理解并预测状态转换规律对科学决策和风险控制很关键，但状态转移因系统内部复杂和外部不确定而具强随机性。为建模分析这类随机现象，概率论发展出“随机过程”分支，其中马尔可夫链因假设简洁、表达能力强而突出。它由俄国数学家马尔可夫于1906年提出，核心“无记忆性”思想降低模型复杂度，可用转移概率矩阵描述复杂系统。实际应用中，我们常通过观测得到状态序列，却难直接知晓系统内在转移规律。如何基于有限观测数据推断验证马尔可夫性质、估计转移概率并预测未来状态，是本文核心研究问题，将构建完整分析框架提供方法论。

1 马尔可夫链的基本理论

1.1 定义与核心性质

一个离散时间马尔可夫链 (Discrete-Time Markov Chain, DTMC) 是一个随机过程 $\{X_n, n=0,1,2,\dots\}$ ，其中 X_n 表示系统在时刻 n 所处的状态。该过程满足马尔可夫性质，其数学表述如下：

$$P(X_{n+1}=j | X_n=i, X_{n-1}=i_{n-1}, \dots, X_0=i_0) = P(X_{n+1}=j | X_n=i)$$

对于所有状态 $i, j, i_0, \dots, i_{n-1}$ 和所有时间点 $n \geq 0$ 均成立。这意味着，在已知当前状态 $X_n = i$ 的条件下，系统在下一时刻转移到状态 j 的条件概率，与系统是如何到达状态 i 的历史路径完全无关。若上述转移概率不随时间 n 变化，则称该马尔可夫链为时齐的。本文后续讨论均默认指时齐马尔可夫链，这是最常见也最具实用价值的情形^[1]。

1.2 核心构成要素

一个完整的马尔可夫链模型由以下三个核心要素构成：

状态空间：记为 $S = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ ，是系统所有可能状态的集合。本文主要讨论有限状态空间的情形。

初始状态分布：记为 $\pi^{(0)} = [\pi_1^{(0)}, \pi_2^{(0)}, \dots, \pi_m^{(0)}]$ ，其中 $\pi_i^{(0)} = P(X_0 = s_i)$ 表示系统在初始时刻 0 处于状态 s_i 的概率。

一步转移概率矩阵：这是马尔可夫链的核心。记为 $P = [P_{ij}]_{m \times m}$ ，其中元素 P_{ij} 定义为：

$$P_{ij} = P(X_{n+1} = s_j | X_n = s_i)$$

即从状态 s_i 在一步之内转移到状态 s_j 的概率。由于这是一个概率分布，转移矩阵 P 具有以下基本性质：一是非负性：对所有 i, j ，有 $P_{ij} \geq 0$ 。二是行和为 1：对每一行 i ，有 $\sum_{j=1}^m P_{ij} = 1$ 。满足这两个性质的矩阵被称为随机矩阵。

2 基于多次试验的转移概率估计

在实际应用中，转移概率矩阵 P 通常是未知的。我们需要通过观察系统在多次试验或长时间运行中产生的状态序列来对其进行估计。

2.1 最大似然估计法

假设我们通过观测得到了一个长度为 $N+1$ 的状态序列 $X_0, X_1, X_2, \dots, X_N$ 。我们可以统计从状态 s_i 转移到状态 s_j 的次数，记为 n_{ij} 。同时，统计系统处于状态 s_i 的总次数（即作为转移起点的次数），记为 $n_i = \sum_{j=1}^m n_{ij}$ 。在马尔可夫链的假设下，观测到该序列的似然函数可以分解为各个转移事件概率的乘积。根据最大似然估计原理，一步转移概率 P_{ij} 的最优估计值 $\hat{P}_{ij}$ 为：

$$\hat{P}_{ij} = \frac{n_{ij}}{n_i}$$

这本质上就是频率估计法，即用观测到的转移频率来近似真实的转移概率。该估计量具有一致性和无偏性等良好统计性质，尤其在样本量 N 足够大时效果显著。

2.2 挑战与解决方案

然而,在实际操作中会遇到一些挑战:一是零频问题:当状态空间较大或观测序列较短时,某些状态转移可能从未被观测到($n_{ij}=0$),导致 $\hat{p}_{ij}=0$ 。这在现实中可能是不合理的,因为未观测到不代表不可能发生。二是高方差:对于转移次数 n 很小的状态,其转移概率的估计方差会很大,结果不稳定。为了解决这些问题,可以采用平滑技术。一种常用的方法是拉普拉斯平滑或加一平滑:

$$\hat{p}_{ij} = \frac{n_{ij} + 1}{n_i + m}$$

其中 m 是状态空间的大小。这种方法为每个可能的转移都预设了一个虚拟的计数,有效避免了零概率的出现,并能在小样本情况下提供更稳健的估计。

3 多次试验下的多步状态转移分析

在掌握了单步转移规律后,我们自然关心经过多个时间步长后,系统状态会发生怎样的变化。例如,在天气模型中,我们想知道“如果今天是晴天,三天后的天气情况如何?”

3.1 n 步转移概率与查普曼-柯尔莫哥洛夫方程

定义 $p_{ij}^{(n)}$ 为从状态 s_i 出发,经过 n 步后到达状态 s_j 的概率,即:

$$p_{ij}^{(n)} = P(X_{k+n} = s_j | X_k = s_i)$$

对于时齐马尔可夫链,该概率与起始时刻 k 无关。

查普曼-柯尔莫哥洛夫方程是连接单步与多步转移概率的桥梁。它指出,要完成从 i 到 j 的 $m+n$ 步转移,可以先从 i 经过 m 步到达某个中间状态 k ,再从 k 经过 n 步到达 j ,并对所有可能的中间状态 k 求和^[2]:

$$p_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k=1}^m p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)}$$

3.2 矩阵乘法视角

从矩阵角度看, n 步转移概率矩阵 $P^{(n)}$ 恰好等于一步转移概率矩阵 P 的 n 次幂:

$$P^{(n)} = P^n$$

其中, $P^1 = P$, $P^0 = I$ (单位矩阵)。因此,要计算任意步长的转移概率,只需对转移矩阵 P 进行相应的矩阵乘法运算即可。例如,在前述天气模型中,两天后的转移概率矩阵为:

$$P^{(2)} = P \times P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.72 & 0.28 \\ 0.56 & 0.44 \end{bmatrix}$$

这意味着,如果今天是晴天,两天后仍是晴天的概率为72%。

3.3 系统状态分布的演化

设 $\pi^{(n)} = [\pi_1^{(n)}, \dots, \pi_m^{(n)}]$ 为系统在时刻 n 的状态概率分布向量,

其中 $\pi_j^{(n)} = P(X_n = s_j)$ 。根据全概率公式, $\pi^{(n)}$ 可以通过初始分布 $\pi^{(0)}$ 和转移矩阵 P 计算得出:

$$\pi^{(n)} = \pi^{(0)} P^n$$

这为我们预测系统在未来任意时刻的整体状态分布提供了直接的计算工具。

4 马尔可夫链的长期行为与状态分类

当试验次数或时间步长趋于无穷大时,马尔可夫链会展现出其内在的长期稳定特性。理解这些特性对于把握系统的最终归宿至关重要。

4.1 稳态分布 (平稳分布)

一个概率分布向量 $\pi = [\pi_1, \dots, \pi_m]$ 被称为马尔可夫链的稳态分布或平稳分布,如果它满足:

$$\pi = \pi P$$

并且 $\sum_{i=1}^m \pi_i = 1, \pi_i \geq 0$ 。这意味着,一旦系统的状态分布达到 π ,那么在后续的任何时刻,其分布都将保持不变。稳态分布代表了系统在长期运行下的平均行为。对于一个不可约(即任意两个状态都可以相互到达)且非周期(即不存在固定的循环周期)的有限状态马尔可夫链,其稳态分布 π 存在且唯一,并且与初始分布无关。此时,无论系统从何种状态开始,其状态分布 $\pi^{(n)}$ 都会随着 $n \rightarrow \infty$ 而收敛到 π 。

4.2 状态的分类

并非所有状态都具有相同的长期行为。根据其可达性和返回特性,状态可以分为以下几类:

可达性: 如果存在 $n \geq 0$ 使得 $p_{ij}^{(n)} > 0$,则称状态 s_j 从状态 s_i 可达,记作 $s_i \rightarrow s_j$ 。如果两个状态互相可达,则称它们互通。

闭集: 一个状态子集 C 被称为闭集,如果从 C 中的任何状态出发,都无法转移到 C 之外的状态。

吸收态: 如果一个状态 s_i 满足 $p_{ii} = 1$,则称其为吸收态。一旦进入吸收态,系统将永远停留在该状态。吸收态是闭集中最简单的情形。

瞬时态: 如果从状态 s_i 出发,存在一个正的概率使得系统在离开 s_i 后将永不返回,则称 s_i 为瞬时态。在有限马尔可夫链中,从任何瞬时态出发,最终都会以概率1进入某个常返类。

常返态: 如果从状态 s_i 出发,系统将以概率1无限次地返回 s_i ,则称 s_i 为常返态。一个不可约的有限马尔可夫链中的所有状态都是正常返的。

理解状态的分类有助于我们判断系统是否会陷入某个特定状态(如吸收态),或者是否会在一组状态之间持续振荡^[3]。

5 经典例题

【例1】(2026·山东省临沂市·模拟题)在2026年央视春

晚舞台上,多款智能机器人协同完成舞蹈、列队、翻转等高难度表演.某实验室为测试A、B两种型号机器人的动作稳定性,设计如下试验:每次独立执行一个动作,若某型号机器人试验成功,则下一轮继续使用该型号机器人进行试验;若试验失败,则下一轮更换另外一种型号的机器人进行试验。

已知A型号机器人试验成功的概率为 $\frac{4}{5}$,失败的概率为 $\frac{1}{5}$;B型号机器人试验成功的概率为 $\frac{1}{2}$,失败的概率为 $\frac{1}{2}$.试验成功记1分,失败记0分,且第1轮使用A型号机器人。

记X为前3轮试验的总得分,求X的数学期望E(X);

设 P_n 为第n轮试验使用A型号机器人的概率。

求数列 $\{P_n\}$ 的通项公式;

记 S_n 为前n轮试验的期望总得分,求 S_n 关于n的表达式。

解:(1)若得分为0分,则3轮都失败,概率为 $\frac{1}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{50}$;

若得分为1分,则3轮中只有1轮成功,概率为

$$\frac{4}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{21}{100};$$

若得分为2分,则3轮中只有2轮成功,概率为

$$\frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{129}{500};$$

若得分为3分,则3轮都成功,概率为 $\frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{64}{125}$ 。

$$\therefore E(X) = 0 \times \frac{1}{50} + 1 \times \frac{21}{100} + 2 \times \frac{129}{500} + 3 \times \frac{64}{125} = \frac{1131}{500}.$$

设第n轮试验使用A型号机器人为事件 M_n ,

$$\text{则 } P_1 = P(M_1) = 1, P(M_{n+1}|M_n) = \frac{4}{5}, P(M_{n+1}|\overline{M}_n) = \frac{1}{2},$$

由全概率公式可得 $P(M_{n+1}) = P(M_n)P(M_{n+1}|M_n) + P(\overline{M}_n)P(M_{n+1}|\overline{M}_n)$,

$$\text{所以 } P_n = \frac{4}{5}P_{n-1} + \frac{1}{2}(1 - P_{n-1}) = \frac{3}{10}P_{n-1} + \frac{1}{2}.$$

$$\text{则 } P_n - \frac{5}{7} = \frac{3}{10}(P_{n-1} - \frac{5}{7}),$$

则数列 $\{P_n - \frac{5}{7}\}$ 是首项为 $P_1 - \frac{5}{7} = 1 - \frac{5}{7} = \frac{2}{7}$,公比为 $\frac{3}{10}$ 的等比数列,

$$\text{则 } P_n - \frac{5}{7} = \frac{2}{7}(\frac{3}{10})^{n-1},$$

$$\therefore P_n = \frac{5}{7} + \frac{2}{7}(\frac{3}{10})^{n-1};$$

设第k轮得分期望为 E_k ,则 $E_k = P_k \cdot \frac{4}{5} + (1 - P_k) \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{7} + \frac{3}{35}(\frac{3}{10})^{k-1}$ 。

$$\therefore \text{前n轮期望总得分为 } S_n = \sum_{k=1}^n E_k = \frac{5n}{7} + \frac{3}{35} \left[1 - (\frac{3}{10})^n \right] \frac{1}{1 - \frac{3}{10}} = \frac{5n}{7} + \frac{6}{49} [1 - (\frac{3}{10})^n]$$

【例2】(2026·河北省邯郸市·模拟题)甲、乙、丙三人进行远程射击,命中目标的概率分别为 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ 。现按甲、乙、丙的顺序循环,由甲先射击,规则如下:若当次射击命中,则下一次由接下来的第1个人进行射击;若当次射击未命中,则跳过1个人,下一次由接下来的第2

个人进行射击。^[4]

前3次射击结束,求丙未进行射击的概率;

若第n次由甲、乙、丙射击的概率分别为 P_n , Q_n , R_n 。

求 R_n ;

若前n次射击中,丙射击的次数记为 X_n ,求 $E(X_n)$

【解析】解:设事件A为甲射击命中,事件B为乙射击命中,

事件M为前3次射击结束,丙未进行射击,

$$\text{那么 } P(M) = P(A\overline{B}) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{4},$$

所以前3次射击结束,丙未进行射击的概率为 $\frac{1}{4}$;

$$R_n = \frac{1}{2}Q_{n-1} + \frac{1}{2}P_{n-1},$$

$$\text{又 } P_{n-1} + Q_{n-1} + R_{n-1} = 1, \text{ 所以 } R_n = \frac{1}{2}(1 - R_{n-1}),$$

$$\text{化简得 } R_n - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}(R_{n-1} - \frac{1}{3}),$$

又 $R_1 = 0$,所以数列 $\{R_n - \frac{1}{3}\}$ 是首项为 $-\frac{1}{3}$,公比为 $-\frac{1}{2}$ 的等比数列,

$$\text{所以 } R_n - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^{n-1},$$

$$\text{则 } R_n = \frac{1}{3}[1 - (-\frac{1}{2})^{n-1}],$$

设变量 Y_k 为第k次丙射击,则 $Y_k = \begin{cases} 1, & \text{第k次丙射击} \\ 0, & \text{第k次不是丙射击} \end{cases}$,
 $X_n = \sum_{k=1}^n Y_k$,

$$\text{所以 } E(X_n) = \sum_{k=1}^n E(Y_k) = \sum_{k=1}^n R_k = \frac{1}{3}n + \frac{2}{9}(-\frac{1}{2})^n - \frac{2}{9}.$$

6 结语

本文阐述利用马尔可夫链分析多次试验下状态转移概率的理论与方法,从基本定义出发探讨如何从观测数据估计转移概率矩阵,解析多步转移概率计算机制,揭示其内在稳定性和结构性质,并通过金融和气象领域实例证明其实用价值。马尔可夫链以“无记忆”假设构建数学框架,虽现实过程可能更复杂,但它仍是极佳起点和基准模型,且是许多高级模型的理论基石。它本身应用广泛,在未来的研究中,如何将其与其他机器学习技术结合,处理更高维、更非线性的状态空间,是值得探索的方向。

参考文献

- [1]张志刚.马尔可夫链:意涵、价值与教学[J].数学教学研究,2024,43(04):41-45+50.
- [2]张渐.马尔可夫链视角下高中数学概率问题的建模与解法探究[J].数理天地(高中版),2026,(01):4-5.
- [3]王旭阳.高考数学中“马尔可夫链”试题评析与溯源——以两道高考试题为例[J].数学教学研究,2025,44(04):58-62.
- [4]胡银伟.概率中的递推问题——马尔可夫链[J].中学生数理化(高二数学),2025,(05):22-25.