

“搭梯子”的艺术：中职生数学建模素养的层级化培养策略研究——以计算机专业“二分查找中的对数增长模型”为例

杨慧敏

四川省工业贸易学校 四川 成都 610081

摘 要：在中职数学建模教学过程中存在“任务跨度大、学生畏惧感强烈”的问题，为此我们结合最近发展区以及 APOS 理论建立了一个由“识别提取—简化假设—表达计算—验证反思—迁移创造”五层构成建模素养培养方案并给出“问题链推进、专业场景降维、小组互搭梯子、评价量规层级化”四种教学建议。以计算机专业的“二分查找中的对数增长模型”进行准实验研究发现：实验组建模素养总分大幅提高（21.6→36.8， $p < 0.001$ ），效应量 Cohen'sd = 2.14，尤其是表达计算及验证反思层次的进步最大。此方法可以明显减轻中学生建模学习负担，对提高数学建模素养具有积极意义。

关键词：中职数学；数学建模；层级化培养；支架教学；最近发展区

引言

《中等职业学校数学课程标准》提出培养数学建模素养，但实际教学存在三大困难：任务跨度过大，中职生基础弱，难以一蹴而就；案例脱离实际，难以体会数学工具价值；评价方式单一，无法区分学生能否有效提取变量、合理假设和进行计算，难以反映真实问题。因此，首要任务是建立符合中职生认知特点的梯度式培养方案，让不同水平学生逐步提升。理论上以最近发展区和 APOS 理论分层搭建认知台阶；实践上则希望提供一线教师可直接或稍作调整使用的梯度式教案、评价量表、前测后测问卷等，以落实新课标要求。

1 理论基础与分析框架

本文提出了“建模素养层级化培养分析框架”，其内在逻辑是：根据最近发展区确定学生现有水平和可能达到的发展水平之间的教学区间；用 APOS 来分层——把建模素养由“具体操作”到“迁移创造”逐步上

升的过程与 APOS 中的“操作—过程—对象—图式”相对应；用数学化来规定各个层次的教学活动设计要求——底层注重水平数学化（从现实情境中抽象出数学模型），高层注重垂直数学化（在符号系统内运算和证明），最高层两者结合运用，然后用支架教学的方式把这些理念变成具体的问题串、任务串以及评价量规，让这根“梯子”在恰当的时间和程度上给予中职生必要的建模指导并适时放手。

2 建模素养层级体系的构建

2.1 层级划分的依据与原则

层级有三个要求：认知递进（从具象到抽象、从模仿到创造、从外在指导到自我驱动），教学可实施性（每一层级都有具体的教学行为以及评估标准），专业化对接（可以接入到专业的环境中，在第五层中转移的任务是关于计算机、金融等问题）。

2.2 五层级模型

表 1 五层级模型

层级	名称	核心任务	APOS 阶段	教学形式	教师支架
第一层	识别与提取找出变量	用自然语言描述它们之间的关系	操作	观察、填空、举例	示范、提示
第二层	简化与假设	忽略次要因素，进行一些合理的假设	操作 → 过程	讨论、作图、填空	提问
第三层	表达与计算	建立数学模型，进行简单运算	过程	独立完成书写、计算	反馈、纠正
第四层	验证与反思	检验模型，分析偏差，尝试修正	对象	模拟验证、小组讨论	追问、质疑
第五层	迁移与创造	在新情境下自主建模、评价改进	图式	项目任务、展示汇报	撤除支架、同伴互评

2.3 各层级认知特征与典型表现

第一层“找得到”：能够发现变化量以及核心目标进行求解，但是问题在于忽略情境中一些无关紧要的信息^[2]。第二层“敢舍”，即敢于做出合理的近似假设，接受“不精确”的建模思想——这是中职生的第一关卡，在教学过程中要帮助他们抓主要矛盾。第三层“建得准”，能够把分析写成数学表达式（例如 $f(n) = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$ ）并且说明每个操作所代表的意义。第四层“辨得清”，能够手工验证并且发现近似偏差，理解模型是“上界估计”，而不是完全正确，具有批判精神。第五层“用得活”：能够将所学应用到二叉搜索树或者哈希表负载因子等情况当中，能够自主设计类似折半问题；由“解一道题”过渡到“用一种想法解决一类问题”。

3 “搭梯子”的实践策略

3.1 基于问题链的层级推进策略

每个建模任务设计 3~5 个层级递进的小问题，形成不可跳越的问题链。如，“二分查找中的对数增长模型”。

Q1（层级 1）：在一个有 1 至 100 数字从小到大排列数组内找到一个数，需要进行多少次比较？

Q2（层次 2）：每次比较之后待查范围减少到原来的多少？第 k 次之后待查范围长度是多少？

Q3（层级 3）：写出比较次数与列表长度的函数表达式并计算。

Q4（层级 4）：令 $n = 100$ ，用人工方式进行计算公

式结果，如果出现错误分析原因。

Q5（层级 5）：若 $n = 10^6$ ，结果对算法设计有何启示？

每一个问题都是后一个问题的前提条件，在老师指导下，学生可以“如果在第三题上遇到困难，回过头来看第二题”自己进行反思。

3.2 专业场景“降维”支架策略

先剥离专业术语，展示一般数学思想，然后一步步回到专业背景。如二分查找分三个步骤：

纯数学情境：猜数字游戏，建立对数增长模型。

半专业情境：“猜数字”改为“有序数组查找”，而“最多比较次数”仍然是一个数学问题^[3]。

全专业情境：提出“时间复杂度”，并和顺序查找进行比较（当 $n = 100$ 万时，20 次 vs 100 万次），给学生带来强烈感受。

3.3 小组“互搭梯子”的活动设计

采用异质分组（每组 4 人，在前测基础上分层），通过拼图法给每位同学安排不同层次的小任务。例如，“图书查找”，学生 A 提出变量，B 简化假设，C 建立模型，D 验证反思，然后把这些片段拼接成一篇完整的论文，由较高层次的学生给较低层次的学生讲解“怎样搭梯子”。同伴教学让学困生在轻松环境下更好理解，同时教授者也通过“教”而加深理解。

3.4 评价量规层级化策略

制定五个方面、四级别评价量表（见下表所示），每一级别有 2 到 3 项具体的行为标准，0 到 3 分进行打分。

表 2 中职生数学建模素养层级评价量规（简表）

层级	关键指标	0 分	1 分	2 分	3 分
第 1 层	找出变量、说清关系	无法找出	找出 1 个	找出全部	规范标记
第 2 层	合理假设、简化表述	不能	不合理	基本合理	严谨完整
第 3 层	建立模型、准确计算	不能	结构错误	基本正确	完全正确
第 4 层	验证结果、分析偏差	不能	方法错误	能验证	深入分析
第 5 层	迁移新情境、评价优化	不能	需要很多提示	基本独立	完全独立

量规价值：学生可以用于自我评价“卡在哪个层次”，老师可以根据本班不同层次学生的成绩情况有针对性地进行指导（如第二层分数较低，则需要加强对“简化假设”的训练）。

4 教学案例：二分查找中的对数增长模型

4.1 案例选择依据

选择这个例子有三个原因：第一是模型简洁明了（ $f(n) = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$ ），适合中职二年级的学生学习；第二是计算机领域的问题，能够激发兴趣；第三是对数的概念正处于学生的“最近发展区”，便于检验“搭梯子”的有效性。

4.2 教学过程实录（关键环节）

第一层（10 分钟）：“猜数字”游戏（1~100），每人两组，每组三局，记下所用次数。然后提问：“范围

1~8 最多需要几次”，学生列举得到三次，有“最坏情况”的概念。第二层（10 分钟）：让学生思考为什么猜中间最优，学生回答：“可以排除一半。”再问“每次排除一半，第 k 次之后剩余范围是多少？”学生完成任务单中的相关内容，在“范围长度”与“比较次数”的概念容易产生混淆的情况下，用线段对折的方式帮助他们理解。第三层（15 分钟）：提问：“ $2k$ 和 n 有什么关系呢？但是 n 不一定恰好等于 $2k$ ，在还剩一个数的情况下需要再进行一次比较才能确定是不是目标，公式是什么？”让学生自己写出 $f(n) = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$ 并求出 $f(100) = 7, f(1000) = 10$ 。对于为什么用向下取整而不是四舍五入的问题，讲解：因为比较次数一定是整数并且要能找到目标，所以向下取整之后再加一。第四层（10 分钟）：手工做一次 $n = 9$ 的情形。模型得出 4 次，而实际上最差结

果（找1或者9）恰为4次，有少数几个只需3次。问：模型认为最多4次，实际上也最多4次，那么模型是对的？如果模型给出3次是否正确？同学们发现模型是一个“上限估计”，过高比过低保险——符合我们在算法分析时考虑最坏情况的思想。第五层（15分钟）：迁移任务：“给定一个平衡二叉搜索树，其中含有 n 个结点，那么这个树的高度 h 和 n 之间有什么联系？”将“比较次数”类比为“从根至叶的路径长度”，得到 $2h-1 \leq n \leq 2h$ ，两边同时取以2为底的对数，则有 $h = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$ 。一部分同学自己解决，一部分同学小组交流最后全班统一答案。

4.3 学生作品与典型反应

任务单显示：第1~3层正确率为85%以上；第4层约有30%的学生在分析原因时描述不清（只是说“由于取整”，而对为什么会比较次数没有说明）；第5层约有50%的学生能够自主完成，另外一部分需要他人的帮助。这说明接下来要加强对学生的“验证反思”的元认知指导。

5 研究设计与效果分析

5.1 研究对象与过程

选择一所中职学校计算机专业二年级两个平行班级作为研究对象，实验班43名学生，对照班41名学生。在进行预测试验中两组学生数学成绩不存在明显区别（ $t = 0.34$, $p = 0.74$ ）。实验班进行为期4周层次性建模教学（共8节课），而对照班则使用传统的“教师讲授例题然后布置习题”的方式进行授课，其内容都是“函数模型及算法复杂度”。前后测问卷（任务A“商品价格竞猜”，任务B“图书检索”）用五级量表打分，在两位老师分别给出分数之后求平均分，评分者一致性系数为0.89。

5.2 数据结果与分析

表3 实验班与对照班前后测总分及层级得分比较
($M \pm SD$)

维度	实验班 (n = 43)	对照班 (n = 41)	组间比较
前测总分	21.6 $\pm$ 4.2	22.1 $\pm$ 4.0	$t = 0.57$, $p = 0.57$
后测总分	36.8 $\pm$ 3.5	28.3 $\pm$ 4.8	$t = 9.23$, $p < 0.001$
提升幅度	+15.2	+6.2	Cohen's $d = 2.14$
第1层 (前/后)	5.1/7.8	5.3/6.9	—
第2层 (前/后)	4.2/7.2	4.4/5.8	—
第3层 (前/后)	4.5/8.1	4.6/6.2	—

续表：

第4层 (前/后)	3.8/7.0	4.0/4.9	—
第5层 (前/后)	4.0/6.7	3.8/4.5	—

各个层次前后测的变化情况：实验班第1到第5层分别增加+2.7,+3.0,+3.6,+3.2,+2.7；而对照班则分别是+1.6,+1.4,+1.6,+0.9,+0.7。配对样本 t 检验表明两个班级后测成绩都比前测有较大提高（ $p < 0.001$ ），同时实验班提高程度也远超对照班（ $t = 8.45$, $p < 0.001$, $d = 2.14$ ）。实验班在第3层（表达与计算）、第4层（验证与反思）进步最大（+3.6,+3.2），而对照班这两层提升较小（+1.6,+0.9）；第5层（迁移与创造）实验班增加了2.7分，但对照班只增加了0.7分。

5.3 讨论

第一，层次化策略有助于降低认知难度，在第1-2层之后测试都超过7分（满分9），因此低层次的基础性工作需要“搭梯子”，而不是学生本来就会。第二，验证反思是建模教学的重要环节：实验班第4层进步显著高于对照班，因为传统的教学中，“验证”仅指代入检验，而在层次化的教学中增加手动仿真及误差反思，有利于提高学生的反思能力^[4]。第三，迁移能力需要“有指导的练习”，而实验班第5层绝对得分（6.7/9）仍然小于下层，说明迁移是最难发展的，以后要提供更多的不同的情境并且适当增加指导性的独立练习的时间。

6 结语

实践表明，基于最近发展区与APOS理论的五层模型效果显著（效应量 $d = 2.14$ ），验证了支架适时撤除的重要性。研究发现，建模素养的识别与表述（1~3层）短期易提升，而验证反思及迁移创造（4~5层）需长期训练。建议教师设“小台阶”递进提问，强化验证反思（如动手操作、错误分析），并建立分层评价档案。受限于四周时长、专业单一（计算机）及样本量（84人），结论仅供参考。后续可跟踪长期影响，开发跨专业资源，并探索生成式AI作为动态支架提供个性化支持。

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部. 中等职业学校数学课程标准（2020年版）[S]. 北京：高等教育出版社,2020.
- [2] 魏旻艳. 基于核心素养的中职数学建模教学探析[J]. 学周刊,2023(33):23-25.
- [3] 田静,王燕. 融合与创生：“中职数学+专业”课程整合与教学改革实践[J]. 职业教育研究,2021(2):63-68.
- [4] 汪贞贞. 支架式教学在初中数学课堂的应用[D]. 安庆师范大学,2021.