

间接耦合混合量子-经典非谐振子的测度同步

徐 敏

西安邮电大学 陕西 西安 710121

摘要: 本文在耦合量子-经典混合系统中, 以量子非谐振子系统作为中间桥梁, 实现两个经典非谐振子通过量子非谐振子产生间接耦合, 研究其动力学行为。其中量子系统的动力学由薛定谔方程描述, 经典系统动力学用哈密顿正则运动方程表示, 分别得出间接耦合下两经典系统非谐振子的相图、能量、平均能量和序参量的数值计算结果, 同时与直接耦合下的两经典非谐振子的动力学行为进行对比分析。结果表明相较于直接耦合, 间接耦合下的两经典非谐振子系统需要更大的耦合作用才能实现由非测度同步到测度同步态的转变。

关键词: 测度同步; 间接耦合; 耦合量子-经典混合系统; 非谐振子

引言

同步现象广泛存在于自然界与科学界中, 鸟群迁徙、萤火虫的闪烁、心脏细胞搏动和蟋蟀的鸣叫, 这些都是与同步相关的自然和生命现象。同步的定义最早可追溯到1665年荷兰物理学家惠更斯(Huygens), 他在无意间观察到安装在同一横梁上两个钟摆的同步^[1]。

已经有研究证明, 同步是耗散系统中一种典型的集体动力学行为, 即同步在保守系统中是不可能的。而在保守哈密顿系统中, 刘维尔定理防止了轨道的完全坍塌, 因此传统的完全同步不能出现。在1999年, 由Hampton和Zanette等人指出耦合哈密顿系统集体行为的一般形式, 他们在研究二维映射系统中发现它们表现出弱同步的形式, 并将其命名为测度同步^[2]。这标志着同步研究领域的一次重要突破, 引发了对测度同步现象的广泛关注。此后, 进一步的研究展示了测度同步在不同系统中的普遍存在, 包括耦合 ϕ^4 模型、Duffing模型以及Morse振子等^[3-6]。然而, 这些研究主要集中在直接耦合的经典系统中, 而我们的研究专注于对间接耦合方式下耦合量子-经典系统中测度同步的探索, 为同步现象的理解提供了新的视角。

近年来, 量子-经典混合系统的研究备受瞩目, 其在量子信息处理、量子模拟和精密测量等领域中潜在的应用引起了广泛关注, 这类系统为科学家提供了一个独特的平台, 以深入探讨量子动力学和经典动力学之间的中间领域。在这一研究背景下, 耦合量子-经典系统的应用研究已成为一个热门的研究领域。

本文的研究聚焦于间接耦合混合量子-经典非谐振子中的测度同步问题。我们选用了由一个量子非谐振子和两个经典非谐振子构成的系统作为我们的模型。通过引入一个量子非谐振子, 我们实现了两个经典非谐振子之间的间接耦合, 并仔细观察了系统的动力学行为。

与此同时, 我们还将这种间接耦合的情况与直接耦合的两个经典非谐振子进行了比较。通过对比分析, 我们在间接耦合方式下发现了耦合量子-经典系统中的两个经典非谐振子的新现象。这些新发现有望为理解量子-经典混合系统中的耦合行为提供新的见解, 并为相关领域的研究提供有价值的信息。

1 数值模型

这里我们把经典非谐振子系统 b 和经典非谐振子系统 c 通过量子非谐振子系统 a 进行间接耦合, 对系统进行动力学分析, 系统的总哈密顿量可以写为:

$$\hat{H} = \hat{H}_a + H_b + H_c + \hat{H}_{ab} + \hat{H}_{ac} + H_{bc} \quad (1)$$

各非谐振子的哈密顿量为:

$$\begin{aligned} \hat{H}_a &= -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial^2 x_a} + \frac{1}{2} \omega_a^2 \hat{x}_a^2 + \lambda_a \hat{x}_a^4 \\ H_b &= \frac{p_b^2}{2} + \frac{1}{2} \omega_b^2 x_b^2 + \lambda_b x_b^4 \\ H_c &= \frac{p_c^2}{2} + \frac{1}{2} \omega_c^2 x_c^2 + \lambda_c x_c^4 \end{aligned} \quad (2)$$

其中, \hat{H}_a 、 H_b 和 H_c 分别是量子非谐振子 a 、经典非谐振子 b 的哈密顿量和经典非谐振子 c 的哈密顿量; ω_a 、 ω_b 和 ω_c 分别是量子非谐振子和两个经典哈密顿系统的固有频率, λ_a 、 λ_b 和 λ_c 分别代表量子非谐振子和两个经典振子的非线性参数, 需要注意的是, 这里的哈密顿量都是经过无量纲化处理的。各振子间的耦合哈密顿量可写为: $\hat{H}_{ab} = k_{ab} \hat{x}_a x_b$; $\hat{H}_{ac} = k_{ac} \hat{x}_a x_c$; $H_{bc} = k_{bc} x_b x_c$, 其中, \hat{H}_{ab} 、 \hat{H}_{ac} 和 H_{bc} 分别表示不同振子间耦合的哈密顿量, k_{ab} 、 k_{ac} 和 k_{bc} 为各振子间的耦合强度。在该非谐振子系统中, 我们设置参数 $\omega_a = \omega_b = \omega_c = 1$ 和 $\lambda_a = \lambda_b = \lambda_c = \lambda$, 从而确保除了初始条件和耦合强度之外的所有参数均保持一致。简言之, 在这种情况下, 系统的运动状态仅取决于初始条件和耦合

强度的设定。该模型对应的动力学方程分别为：

$$i\hbar\partial_t|\psi_a\rangle = \hat{H}_a(t)|\psi_a\rangle \quad (3)$$

以及

$$\begin{aligned} \dot{x}_b &= p_b \\ \dot{p}_b &= -x_b - 4\lambda x_b^3 - k_{ab}\langle\hat{x}_a\rangle(t) - k_{bc}x_c(t) \\ \dot{x}_c &= p_c \\ \dot{p}_c &= -x_c - 4\lambda x_c^3 - k_{ac}\langle\hat{x}_a\rangle(t) - k_{bc}x_b(t) \end{aligned} \quad (4)$$

方程(3)是描述量子系统振子动力学的方程，由薛定谔方程进行表示，在数值计算中用Crank-Nicolson方法来求解；而经典系统用正则运动方程(4)表示，采用四阶龙格库塔法计算。

2 系统的动力学分析

由上文所述该系统的动力学状态仅与初始条件和耦合强度有关，而我们所研究的是间接耦合两经典非谐振子b和c的动力学，即我们需设置系统b和c之间的耦合强度 $k_{bc}=0$ ，非线性系数 $\lambda=0.1$ ，系统的初始条件设定为： $(\hat{x}_a, \hat{p}_a, x_b, p_b, x_c, p_c) = (0.1, -0.2, 0.2, 0.3, 0.5, 0.2)$ 。这里，设置振子间的耦合强度 $k_{ab} = k_{ac} = k$ ，通过改变k的值观察其对系统动力学的影响。为了更全面地了解系统的行为，我们选择将整个系统的运动状态投影到一个二维的相平面 $(x_i(t), p_i(t))$ 上进行研究，这里 $i=b, c$ ，这使得我们能够得到两个经典非谐振子在相空间中的轨迹演化结果。

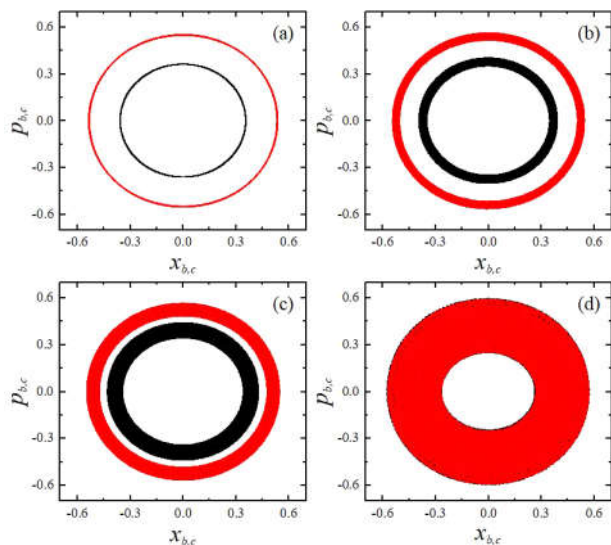


图1 不同耦合强度下间接耦合两经典非谐振子的相图

黑色区域对应经典系统b，红色区域对应经典系统c。其中耦合强度分别为：(a) $k=0$ ；(b) $k=0.02$ ；(c) $k=0.028$ ；(d) $k=0.1$ 。

图1展示了在不同耦合强度下两个经典非谐振子的相空间演化轨迹，当 $k=0$ 时，两振子的运动轨迹都是呈准周期运动的封闭曲线。随着耦合强度的增加($k=0.02$ 和

$k=0.028$)，两非谐振子的相空间轨迹逐渐扩展，由原来的封闭曲线变为圆环，且彼此有相互接近的趋势。当 $k=0.1$ 时，这两个振子的相空间区域变得相同，这意味着此时它们拥有相同的测度，即系统达到了测度同步。

为进一步分析系统的动力学机制，这里我们研究了系统的能量特性。两经典系统非谐振子的能量随时间的变化关系表示为： $E_i(t) = \frac{p_i^2}{2} + \frac{1}{2}\omega_i^2 x_i^2 + \lambda x_i^4$ ，其中 $i=b, c$ 。在图2中，我们显示了随着耦合强度的增加，两个经典非谐振子能量随时间变化的关系。当系统的耦合强度很小时，即 $k=0.01$ ，此时两振子的能量随时间演化的曲线 $E_b(t)$ 和 $E_c(t)$ 完全不相交，表明两振子各自具有独立的能量变化范围。当耦合强度增大到 $k=0.028$ 时，两振子的能量虽不重叠但表现出相互靠近的趋势。随着进一步增大耦合强度，即 $k=0.031$ 时，此时两系统的能量曲线 $E_b(t)$ 和 $E_c(t)$ 之间的差距再次缩小，甚至出现了部分重叠的现象。持续增大耦合强度至 $k=0.04$ ，如图2(d)所示，两经典非谐振子的能量随时间演化曲线 $E_b(t)$ 和 $E_c(t)$ 出现相互交换的现象，具有相同的能量变化范围。这种相互交换标志着系统达到了测度同步状态。

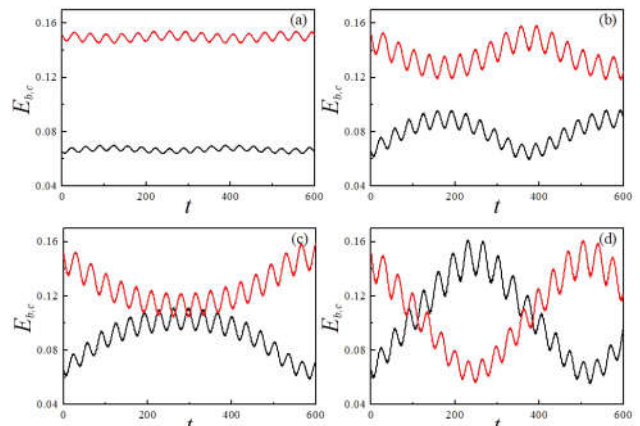


图2 两振子的能量随时间变化

黑色曲线对应经典非谐振子b的能量 $E_b(t)$ ，红色曲线对应经典非谐振子c的能量 $E_c(t)$ 。(a) $k=0.01$ ；(b) $k=0.028$ ；(c) $k=0.031$ ；(d) $k=0.04$ 。

为定量描述系统测度同步的转变，我们引入序参量的概念并定义为：

$$M = \frac{1}{\sum_{i,j} c_{i,j}} \sum_{i,j} c_{i,j} \frac{(n_{i,j} - n'_{i,j})^2}{(n_{i,j} + n'_{i,j})^2}, \quad i, j=1, 2, 3, \dots, N \quad (5)$$

首先将每个子系统的相平面划分为 $N \times N$ 个小单元，这里选取 $N=50$ 作为计算M的适当单元格数。然后分别计算了这两个子系统的轨道演化到每个单元格 (i, j) 的次数，并将它们定义为 n_{ij} 和 n'_{ij} ， $i, j=1, 2, 3, \dots, N$ 。这里，系数 $c_{ij}=0$ 表

示两个轨迹都不能通过单元 (i,j) , 否则 $c_{i,j} = 1$ 。对于测度同步状态, 两个轨迹出现在相应单元格 (i,j) 中的平均次数应该相等, 使得 M 无限趋近于0, 则 $0 < M \leq 1$ 表示系统不处于测度同步状态。

图3显示了间接耦合和直接耦合方式下的序参量与耦合强度的关系。开始时 $k = 0$, 对应的序参量 $M = 1$, 此时两种耦合方式下的系统均处于非测度同步状态, 当耦合强度增大至临界点 $k_c = 0.019$ 时, 直接耦合方式下系统的序参量发生跃变, 并在趋近于零的范围内波动, 表明此时直接耦合方式下的两经典非谐振子系统达到测度同步; 随后, 当耦合强度继续增大至另一临界点 $k_c = 0.032$ 时, 间接耦合方式下的序参量也发生跃变至零附近波动, 此时间接耦合方式下的系统也达到了测度同步状态。该结果再次验证了在间接耦合混合系统中, 非谐振子达到测度同步所需的临界耦合强度大于直接耦合方式下的情况。

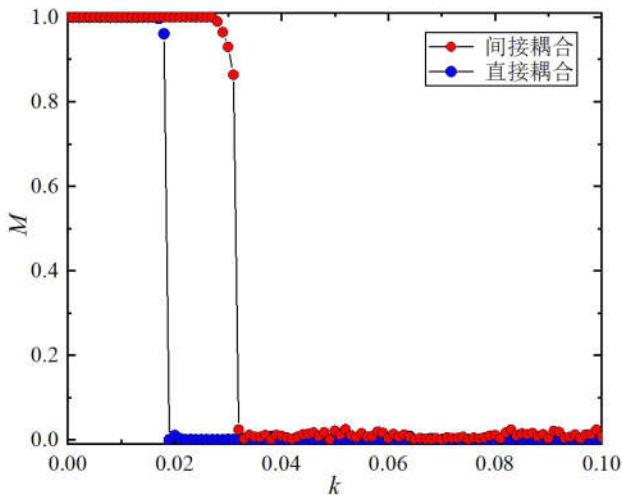


图3 序参量 M 与耦合强度 k 的关系

间接耦合和直接耦合方式下的序参量变化分别用红色和蓝色表示。

结语

在本研究中, 我们将两个经典非谐振子通过一个量子非谐振子进行间接耦合, 深入分析了系统的动力学特性。通过改变耦合强度, 系统展现出相空间区域重合、能量随时间的演化发生相互交换、系统的平均能量趋于一致以及序参量趋于零的数值模拟结果, 这些结果表明间接耦合的方式也能够使系统达到测度同步状态。另外, 该研究证明了相较于直接耦合方式, 间接耦合方式达到测度同步所需的临界耦合值更大。

参考文献

- [1]Klarreich E. Huygens's clocks revisited. (Science Observer)[J]. American Scientist, 2002, 90(4): 322-324.
- [2]Hampton A, Zanette D H. Measure synchronization in coupled Hamiltonian systems[J]. Physical Review Letters, 1999, 83(11): 2179.
- [3]X. G. Wang, M. Zhan, C. H. Lai, G. Hu. Measure synchronization in coupled Hamiltonian systems[J]. Physical Review E, 2003, 67: 066215.
- [4]U. E. Vincent. Measure synchronization in coupled Duffing Hamiltonian systems[J]. New Journal of Physics, 2005, 7(1): 209.
- [5]陈绍英, 顾思齐, 孔祥宇. 耦合Duffing哈密顿系统的测度同步及相同步[J]. 河北师范大学学报(自然科学版), 2011, 35(1): 37-44.
- [6]田静. 耦合Morse振子中测度同步的研究[J]. 兰州大学学报(自然科学版), 2013, 49(4):554-557.