两个不同能隙探测器做圆周运动的纠缠收获

李润虎
西安邮电大学 陕西 西安 710121

摘 要： 本文研究在无质量标量场中，一对具有不同能隙且轨迹为圆周的两能级原子的纠缠收获现象。首先，纠缠收获作为$\Delta d/\sigma$的函数时，存在一个临界能隙Ω_s，当$\Omega_A < \Omega_s$时，不同$\Delta\Omega/\Omega_A$的曲线会相交。当$\Omega_A > \Omega_s$时，不同$\Delta\Omega/\Omega_A$曲线的交点会消失，$\Delta\Omega/\Omega_A$越大，纠缠收获越少。Ω_s随着加速度的增大而减小。然后随着$\Delta\Omega/\Omega_A$的增大，在$\Delta d/\sigma$较小时，我们发现纠缠收获总是从一个非零的值减小到零。在Ω_A较小但$\Delta d/\sigma$很大时，纠缠收获会在较小的$\Delta\Omega/\Omega_A$为零，然后增大再减小到零。

关键词： 真空涨落；纠缠收获；Unruh效应

引言：随着量子场论的发展，人们认识到真空可以成为纠缠的一种资源。已经证明在形式代数量子场论的框架内，自由量子场的真空态是纠缠的。首先由Summers和Werner发现自由量子场论中的真空态最大程度地违反Bell不等式[1]。之后在1991年，Valentini发现可以使用非局部相关的真空场涨落来解释一对最初相隔距离R且不相关的原子，在时间$t < R/c$中所发展出的非局部统计相关性[2]。Valentini所发现的结果在两级Unruh-DeWitt (UDW)探测器模型的协议中得到了进一步的研究[3,4]。这就是“纠缠收获”现象。

纠缠收获现象得到了广泛的研究，比如在黑洞附近[5]、在(2+1)维的Anti-de Sitter空间中[6]、在存在移动的Dirichlet边界条件下的(1+1)维时空中[7]、在Minkowski真空中的无质量标量场中[8]。但是他们的研究通常假设探测器是相同的。最近，Hu等人对Minkowski真空中具有不同能隙的惯性探测器对的纠缠收获现象进行了研究，认为能隙差的存在通常会增大纠缠收获的范围[9]。同样Liu等人对存在边界且具有不同能隙探测器对的纠缠收获进行了研究[10]。因此研究一对做圆周运动且具有不同能隙的探测器的纠缠收获现象是有意义的。

1 数值模型

在本文中，我们对两个不同能隙探测器做圆周加速运动的纠缠收获进行了研究，并讨论了在纠缠收获协议下，不同能隙探测器对相比相同能隙是否会得到更多的纠缠，以及两个探测器之间的能隙差对纠缠收获现象的影响。

1.1 UDW探测器

我们考虑一对基态为$|0\rangle_D$和激发态为$|1\rangle_D$的两能级原子，分别记为A和B。这一对被能隙Ω_D隔开的两能级原子与无质量标量场ϕ的局部相互作用，其中下标D为我们考虑的UDW探测器。我们使用探测器的固有时τ_D将其时空轨迹$x_D(\tau_D)$参数化。则在相互作用绘景下，这种探测器与$\phi[x_D(\tau_D)]$局部耦合的相互作用哈密顿量可以写成：

$$H_D(\tau_D) = \lambda\chi_D(\tau_D)(e^{-i\Omega_D\tau_D}\sigma^- + e^{i\Omega_D\tau_D}\sigma^+)\otimes\phi[x_D(\tau_D)],\quad D\in\{A,B\}, \tag{1}$$

在这里$0<\lambda<1$为相互作用强度。$\chi_D(\tau_D) := \exp[-\tau_D^2/(2\sigma_D^2)]$为高斯开关函数，由参数$\sigma_D$控制其相互作用的持续时间。$\sigma^- = |0_D\rangle\langle 1_D|$和$\sigma^+ = |1_D\rangle\langle 0_D|$表示作用于探测器Hilbert空间的阶梯算子。在相互作用开始前，处于基态探测器A和B与处于真空态$|0\rangle$的标量场的初始联合状态可以写成$|\Psi\rangle = |0_A\rangle|0_B\rangle|0\rangle$。

我们假设两个探测器具有相同的高斯开关参数，即$\sigma = \sigma_A = \sigma_B$。根据相互作用哈密顿量(1)，复合系统进行幺正演化的演化算子满足如下方程：

$$U := T\exp[-i\int dt(\frac{d\tau_A}{dt}H_A(\tau_A) + \frac{d\tau_B}{dt}H_B(\tau_B))], \tag{2}$$

这里T为时序算符。

在基矢$\{|0_A\rangle|0_B\rangle, |0_A\rangle|1_B\rangle, |1_A\rangle|0_B\rangle, |1_A\rangle|1_B\rangle\}$中，进行一定处理，可以得到系统(探测器$A$和$B$)最终的约化密度矩阵为：

$$\rho_{AB} = \begin{pmatrix} 1-P_A-P_B & 0 & 0 & X \\ 0 & P_B & C & 0 \\ 0 & C^* & P_A & 0 \\ X^* & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + O(\lambda^4). \tag{3}$$

在约化密度矩阵ρ_{AB}中，P_D和X分别为：

$$P_D := \lambda^2\iint d\tau_D d\tau_D' \chi_D(\tau_D)\chi_D(\tau_D')e^{-i\Omega(\tau_D-\tau_D')}W(x_D(\tau_D), x_D(\tau_D')), D\in\{A,B\}, \tag{4}$$

$$X := -\lambda^2 \iint_{t>t'} dt dt' [\frac{\partial \tau_B}{\partial t}\frac{\partial \tau_A}{\partial t'} \chi_B(\tau_B(t))\chi_A(\tau_A(t'))e^{-i[\Omega_B\tau_B(t)+\Omega_A\tau_A(t')]}W\left(x_A(t'),x_B(t)\right)$$
$$+\frac{\partial \tau_A}{\partial t}\frac{\partial \tau_B}{\partial t'}\chi_A(\tau_A(t))\chi_B(\tau_B(t'))e^{-i[\Omega_A\tau_A(t)+\Omega_B\tau_B(t')]}W\left(x_B(t'),x_A(t)\right)]. \tag{6}$$

在这里$W(x,x')$为场的Wightman函数。

根据纠缠收获协议，我们使用并发度来度量纠缠。对于公式(3)所给出的类“X”型密度矩阵，并发度的表达式为：

$$\mathcal{C}(\rho_{AB}) = 2\max\left\{0,|X|-\sqrt{P_A P_B}\right\}+\mathcal{O}(\lambda^4) \tag{7}$$

1.2 纠缠收获

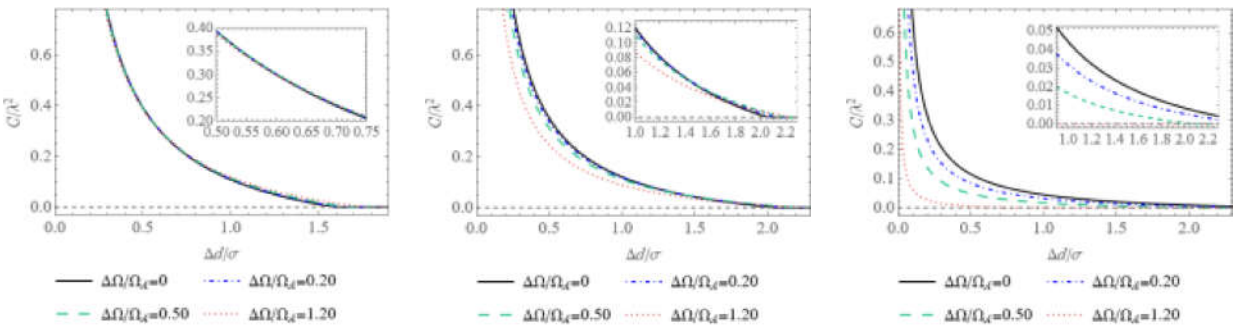
首先假设探测器A和B绕公共轴旋转，且具有相同的角速度、半径和洛伦兹因子，即$\omega_A=\omega_B=\omega$，$R_A=R_B=R$，$\gamma_A=\gamma_B=\gamma$。那么两个探测器的时空轨迹如下：

$$x_A := \{t=\tau_A\gamma, x=R\cos(\omega\tau_A\gamma), y=R_A\sin(\omega\tau_A\gamma), z=0\},$$

$$x_B := \{t=\tau_B\gamma, x=R\cos(\omega\tau_B\gamma), y=R_B\sin(\omega\tau_B\gamma), z=\Delta d\}, \tag{8}$$

Δd为两个探测器之间的距离。我们可以从文献[11]中得到探测器的跃迁概率表达式。我们假设A标记的探测器具有相对较小的能隙，即$\Delta\Omega=\Omega_B-\Omega_A\geqslant 0$。那么我们可以得到非局域关联的表达式为：

$$X = -\frac{\sqrt{\pi}\lambda^2\sigma^2 e^{-\sigma^2(\Delta\Omega+2\Omega_A)^2/4}}{4\pi^2\gamma}$$
$$\int_0^{\infty}\frac{e^{-s^2/(4\gamma^2)}\left(e^{is\Delta\Omega\sigma/(2\gamma)}+e^{-is\Delta\Omega\sigma/(2\gamma)}\right)}{\Delta d^2+4R^2\sin^2(s\omega\sigma/2)-\sigma^2(s-i\epsilon)^2}ds \tag{9}$$



(a) $a\sigma=1.00,\ \Omega_A=0.20$　(b) $a\sigma=1.00,\ \Omega_A=0.50$　(c) $a\sigma=1.00,\ \Omega_A=1.20$

(d) $a\sigma=5.00,\ \Omega_A=0.20$　(e) $a\sigma=5.00,\ \Omega_A=0.50$　(f) $a\sigma=5.00,\ \Omega_A=1.20$

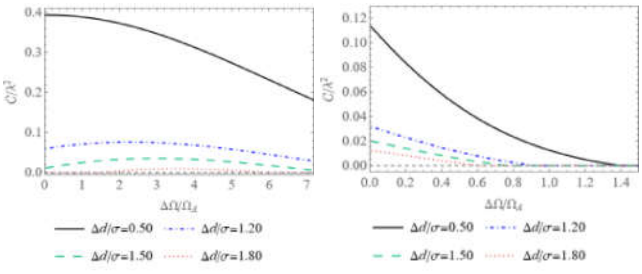
图1：我们分别用$a\sigma=\{1.00,5.00\}$和$\Omega_A=\{0.20,0.50,1.20\}$绘制出并发度作为$\Delta d/\sigma$的函数。在这里我们固定了$R/\sigma=0.20$。图中，不同的线表示不同的$\Delta\Omega/\Omega_A$。

在图1中，我们讨论了在不同的$a\sigma$和Ω_A的情况下，并发度作为探测器间距离$\Delta d/\sigma$的函数。显然，随着探测器间距离的增大，纠缠收获递减至0。我们发现存在一个临界能隙Ω_s，当$\Omega_A<\Omega_s$时，不同$\Delta\Omega/\Omega_A$的曲线会相交，如图1(a)、(b)和(d)。将交点对应的$\Delta d/\sigma$记为$\Delta d_i/\sigma$，在$\Delta d/\sigma$小于$\Delta d_i/\sigma$时，能隙差越小，纠缠收获越多；在$\Delta d/\sigma$大于$\Delta d_i/\sigma$却与之相反。当$\Omega_A>\Omega_s$时，不同$\Delta\Omega/\Omega_A$曲线的交点会消失，而且能隙差越大，纠缠收获越少，如图1(c)、(e)和(f)。Ω_s随着加速度的增大而减小，当$a\sigma=1.00$时，$0.50<\Omega_s<1.20$；当$a\sigma=5.00$时，$0.20<\Omega_s<0.50$。

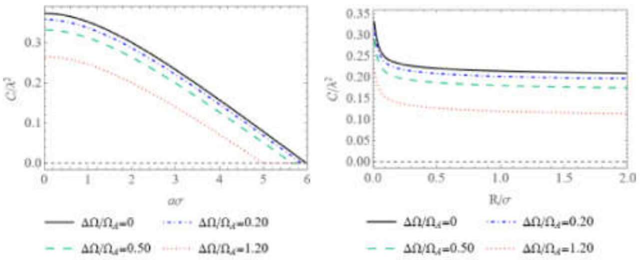
图2：我们绘制了并发度作为$\Delta\Omega/\Omega_A$的函数。在这里我们固定了轨迹半径$R/\sigma=0.20$和加速度$a\sigma=1.00$以及(a) $\Omega_A=0.20$，(b) $\Omega_A=1.20$。

在图2中，我们固定了轨迹半径和加速度，讨论了具有不同的Ω_A的纠缠收获，并将其绘制为$\Delta\Omega/\Omega_A$的函数。

在$\Delta d/\sigma$较小或者Ω_A较大时，随着$\Delta\Omega/\Omega_A$的增大，我们发现纠缠收获总是从一个非零值减小到零。在Ω_A较小时且$\Delta d/\sigma$较大时，纠缠收获会先增大然后减小，此时存在一个最大值。值得注意的是，当$\Delta d/\sigma$很大时，纠缠收获会在较小的$\Delta\Omega/\Omega_A$为零，然后增大再减小到零。同时我们发现$\Delta d/\sigma$越大，纠缠收获范围越小。



(a)$\Omega_A = 0.20$ (b)$\Omega_A = 1.20$



(a) (b)

图3：在图(a)中我们绘制了并发度作为加速度的函数，并固定$\Omega_A = 0.50$，$\Delta d/\sigma = 0.5$和$R/\sigma = 0.20$；在图(b)中我们绘制了并发度$\mathcal{C}(\rho)/\lambda^2$作为轨迹半径的函数，并固定$\Omega_A = 0.50$，$\Delta d/\sigma = 0.5$和$a\sigma = 3.00$。

在图3中，我们绘制了并发度分别作为加速度和轨迹半径的函数。随着加速度的增加，纠缠收获会从一个非零值减小到零。随着轨迹半径的增大，纠缠收获会从非零值减小到一个稳定值。而且，$\Delta\Omega/\Omega_A$越大，所获得的纠缠收获越少。因此我们为了得到更多的纠缠收获，选择两个探测器具有相同的能隙。

结语：在本文中，我们考虑了一对具有不同能隙且轨迹为圆周的两能级原子，与无质量标量场耦合的纠缠收获现象。我们使用并发度作为纠缠收获的度量，并绘制了并发度作为探测器间距离、$\Delta\Omega/\Omega_A$、加速度、轨迹半径的图像。首先，我们讨论了纠缠收获作为探测器间距离$\Delta d/\sigma$的函数。我们发现存在一个临界能隙Ω_s，当$\Omega_A < \Omega_s$时，不同$\Delta\Omega/\Omega_A$的曲线会相交。在交点前，较小的$\Delta\Omega/\Omega_A$会得到更多纠缠收获；在交点后却与之相反。当$\Omega_A > \Omega_s$时，不同$\Delta\Omega/\Omega_A$曲线的交点会消失，能隙差越大，纠缠收获越少。Ω_s随着加速度的增大而减小。然后，我们讨论了的纠缠收获被绘制为$\Delta\Omega/\Omega_A$的函数。在$\Delta d/\sigma$较小或Ω_A较大时，随着$\Delta\Omega/\Omega_A$的增大，纠缠收获总是从一个非零的值减小到零。在Ω_A较小且$\Delta d/\sigma$较大时，纠缠收获会先增大然后减小，此时存在一个最大值。值得注意的是，当Ω_A较小但$\Delta d/\sigma$很大时，纠缠收获会在较小的$\Delta\Omega/\Omega_A$为零，然后增大再减小到零。最后，我们绘制了并发度分别作为加速度和轨迹半径的函数，发现$\Delta\Omega/\Omega_A$越大，纠缠收获越少。因此我们为了得到更多的纠缠收获，选择两个探测器具有相同的能隙。

参考文献

[1]Summers S J and Werner R. The vacuum violates Bell’s inequalities [J]. Physics Letters A, 1985, 110(5): 257-259.

[2]Valentini A. Non-local correlations in quantum electrodynamics [J]. Physics Letters A, 1991 153(6-7): 321-325.

[3]Martín-Martínez E, Brown E G, Donnelly W and Kempf A. Sustainable entanglement production from a quantum field, Phys. Rev. A, 2013, 88: 052310.

[4]Salton G, Mann R B and Menicucci N C. Acceleration-assisted entanglement harvesting and rangefinding, New J. Phys., 2015, 17: 035001.

[5]Henderson L J, Henniga R A, Mann R B, Smith A R H and Zhang J. Harvesting entanglement from the black hole vacuum [J]. Classical and Quantum Gravity, 2018, 35(21): 21LT02.

[6]Henderson L J, Hennigar R A, Mann R B, Smith A R H and Zhang J. Entangling detectors in anti-de Sitter space [J]. Journal of High Energy Physics, 2019, 05: 178.

[7]Cong W, Tjoa E and Mann R B. Entanglement harvesting with moving mirrors [J]. Journal of High Energy Physics, 2019, 06: 021.

[8]Koga Jun-ichirou, Maeda K and Kimura G. Entanglement extracted from vacuum into accelerated Unruh-DeWitt detectors and energy conservation [J]. Physics Review D, 2019 100(6): 065013.

[9]Hu H, Zhang J and Yu H. Harvesting entanglement by non-identical detectors with different energy gaps, Journal of High Energy Physics, 2022, 05, 112.

[10]Liu Z, Zhang J and Yu H. Harvesting correlations from vacuum quantum felds in the presence of a refecting boundary, Journal of High Energy Physics, 2023, 11, 184.

[11]Zhang J and Yu H. Entanglement harvesting for Unruh-DeWitt detectors in circular motion [J]. Physics Review D, 2020, 102(6): 065013.