结合泰勒公式与洛必达法则解决高中复杂导数问题

陈希超　袁　超
威海经济技术开发区博思高考教育培训学校　山东　威海　264209

摘　要：在高中数学的导数学习中，尤其是在处理高考压轴题时，学生常常会遇到涉及超越函数（如指数函数、对数函数、三角函数）的复杂不等式恒成立、参数取值范围以及极限求解等问题。传统的分类讨论法虽然严谨，但往往过程繁琐、计算量大，容易出错。本文旨在系统性地介绍两种源自高等数学的强大工具——泰勒公式与洛必达法则，并深入探讨它们在高中导数问题中的应用原理、适用场景、具体方法及相互联系。通过对比分析和典型例题解析，本文将论证这两种方法如何为解决高中复杂导数问题提供更为简洁、高效的思路，从而帮助学生突破思维瓶颈，提升解题能力。

关键词：泰勒公式；洛必达法则；高中导数；参数分离；不等式证明；极限

引言

导数作为研究函数性质的核心工具，在高中数学课程体系中占据着至关重要的地位。其应用贯穿于函数的单调性、极值、最值、图像描绘乃至不等式证明等多个方面。然而，随着新高考改革的深化，导数试题的难度和综合性不断提升，尤其是压轴题，频繁出现以e^x、lnx、sinx等超越函数为载体的复杂问题。这类问题的核心难点在于，直接利用导数判断函数单调性或求最值时，往往会陷入高阶导数难以处理、临界点无法精确求解的困境[1]。面对此类挑战，一种源于大学微积分的思想方法逐渐被引入高中教学和备考中，即利用泰勒公式进行函数放缩，或借助洛必达法则处理极限。这两种方法并非高中课程标准的硬性要求，但在实际解题中展现出强大的威力，被誉为解决导数难题的“利器”。

1 理论基础与核心思想

1.1 洛必达法则（L'Hôpital's Rule）

洛必达法则是求解特定类型未定式极限的一种高效方法。其核心思想是：当直接代入法无法确定分式极限（如$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$型）时，可以通过分别对分子和分母求导，再求新分式的极限来间接求得原极限。

1.1.1 定义与适用条件

设函数f(x)和g(x)在点a的某去心邻域内可导，且g'(x)≠0。若满足以下任一条件：

$\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$且$\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$（即$\frac{0}{0}$型）

$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$且$\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$（即$\frac{\infty}{\infty}$型）

并且$\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$（其中A可以是实数，也可以是±∞，则有：

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$$

1.1.2 高中应用注意事项

前提验证：使用前必须严格验证是否为$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$型未定式。

连续使用：若一次求导后仍是未定式，可继续使用，但每次使用前都需重新验证条件。

极限存在性：若$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$不存在（且非无穷大），则不能断言原极限不存在，此时洛必达法则失效，需另寻他法。

高考阅卷：在解答题中，直接使用洛必达法则可能存在一定的赋分风险。通常建议将其用于选择、填空题，或在解答题中作为探路工具，最终用严格的分类讨论或函数单调性加以证明。

1.2 泰勒公式（Taylor's Formula）与麦克劳林展开

泰勒公式的核心思想是“以直代曲”、“以简驭繁”，即利用一个多项式函数去逼近一个复杂的光滑函数。多项式函数的性质简单明了，易于求导、积分和比较大小，因此这种逼近为我们研究复杂函数提供了便利。

1.2.1 公式形式

若函数f(x)在包含x_0的某个开区间内具有n+1阶导数，则对该区间内的任意x，有：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中，$R_n(x)$为余项，表示多项式与原函数之间的误差[2]。

当$x_0 = 0$时，上式称为麦克劳林公式，这是高中阶段最常用的形式：

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x)$$

1.2.2 余项与高中应用

在高中应用中，我们主要关注皮亚诺（Peano）余项，记作$o(x^n)$，它表示当$x\to 0$时，余项是比x^n更高阶的无穷小。这意味着，在$x = 0$附近，我们可以用泰勒多项式的前几项来近似甚至放缩原函数。

1.2.3 常见函数的麦克劳林展开式（带皮亚诺余项）

掌握以下基本展开式是应用泰勒公式的关键：

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\ (x>-1)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5)$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+o(x^3)\ (|x|<1)$$

1.2.4 核心应用：构造不等式放缩

通过对上述展开式进行截断，我们可以得到一系列在特定区间内恒成立的不等式，这被称为“切线放缩”或“泰勒放缩”：

$$e^x\geqslant 1+x\text{（保留到一次项）}$$

$$e^x\geqslant 1+x+\frac{x^2}{2}\text{（保留到二次项）}$$

$$\ln(1+x)\leqslant x\text{（保留到一次项）}$$

$$\sin x\leqslant x\text{（保留到一次项）}$$

这些不等式是证明复杂超越不等式、比较函数大小关系的有力武器[3]。

2 洛必达法则在高中导数问题中的应用

洛必达法则在高中导数问题中最典型的应用场景是处理参数分离后的极限问题。

2.1 应用模型：参数分离法

对于形如“$f(x) \geqslant g(a,x)$对$x\in D$恒成立，求参数a的取值范围”的问题，常规思路是：

分离参数：将不等式变形为$a \geqslant h(x)$或$a \leqslant h(x)$。

求最值：问题转化为求函数$h(x)$在区间D上的最大值或最小值。

分析$h(x)$：通过求导分析$h(x)$的单调性以确定最值。

然而，$h(x)$往往是一个复杂的分式函数，其导数符号难以判断，或者其最值出现在区间的端点（特别是开区间的端点），导致$\lim_{x\to x0}h(x)$成为一个$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$型未定式。此时，洛必达法则便派上了用场[4]。

2.2 典型例题解析

例题1（2016年全国II卷改编）：已知函数$f(x) = (x+1)\ln(x+1)$，若对所有$x \geqslant 0$，都有$f(x) \geqslant ax$成立，求实数a的取值范围。

解法分析：

当$x = 0$时，不等式恒成立。

当$x > 0$时，分离参数得$a\leqslant\frac{(x+1)\ln(x+1)}{x}$。

令$h(x)=\frac{(x+1)\ln(x+1)}{x}$，问题转化为求$h(x)$在$(0,+\infty)$上的最小值。

直接求导分析$h(x)$的单调性较为复杂。注意到$h(x)$在$x\to 0^+$时为$\frac{0}{0}$型未定式，这往往是函数取得最值的关键点。

使用洛必达法则求极限：

$$\lim_{x\to 0^+}h(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{(x+1)\ln(x+1)}{x}\overset{洛}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x+1)+1}{1}=1$$

进一步分析可知，$h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，故其最小值趋近于1。因此，a的取值范围为$(-\infty,1]$。

此例中，洛必达法则精准地求出了函数在边界处的极限值，为确定参数范围提供了关键依据。

3 泰勒公式在高中导数问题中的应用

泰勒公式的应用更为广泛，主要体现在不等式证明、函数放缩和比较大小等方面。此处以证明超越不等式为研究对象，许多涉及e^x、$\ln x$、$\sin x$的不等式，其本质就是泰勒展开式的截断形式。

例题2：证明当$x > 0$时，$e^x>1+x+\frac{x^2}{2}$。

证明：

考虑函数$f(x)=e^x-\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)$。

求导：$f'(x) = e^x-(1+x),f''(x) = e^x-1$。

当$x > 0$时，$f''(x) > 0$，故$f'(x)$单调递增，且$f'(0) = 0$，所以$f'(x) > 0$。

因此，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，且$f(0) = 0$，故$f(x) > 0$，即原不等式成立。

这个证明过程实际上是在验证e^x的二阶泰勒多项式是其下界。掌握了泰勒展开，可以直接写出结论，省去构造函数和多次求导的步骤。

例题3（2024·安徽·一模）给出以下三个材料：

①若函数$f(x)$可导，我们通常把导函数$f'(x)$的导数叫做$f'(x)$的二阶导数，记作$f''(x)$.类似的，函数$f(x)$的二阶导数的导数叫做函数$f(x)$的三阶导数，记作$f'''(x)$，函数$f(x)$的三阶导数的导数叫做函数$f(x)$的四阶导数……，一般地，函数$f(x)$的n-1阶导数的导数叫做函数$f(x)$的n阶导数，记作$f^{(n)}(x)=\left[f^{n-1}(x)\right]'$，n ⩾ 4；

②若$n\in\mathrm{N}^*$，定义$n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times3\times2\times1$；

③若函数$f(x)$在包含x_0的某个开区间(a,b)上具有任意阶的导数，那么对于任意$x\in(a,b)$有$g(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$，我们将$g(x)$称为函数$f(x)$在点$x=x_0$处的泰勒展开式.

例如$f_1(x)=\mathrm{e}^x$在点$x=0$处的泰勒展开式为

$$g_1(x)=1+x+\frac{1}{2}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$$

根据以上三段材料，完成下面的题目：

求出$f(x)=\cos x$在点$x=0$处的泰勒展开式$g(x)$；

用$f(x)=\cos x$在点$x=0$处的泰勒展开式前三项计算$\cos 0.3$的值，精确到小数点后4位；

现已知

$$\frac{\sin x}{x}=\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{n\pi}\right)\left(1+\frac{x}{n\pi}\right)\cdots$$

试求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$的值.

【详解】（1）$f(x)=\cos x$，$f'(x)=-\sin x$，$f''(x)=-\cos x$，…，

所以$f(0)=\cos 0=1$，$f'(0)=-\sin 0=0$，$f''(x)=-\cos 0=-1$，…，

由

$$\cos x=1+\frac{0}{1!}(x-0)+\frac{-1}{2!}(x-0)^2+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}(x-0)^{2n}+\cdots$$

所以$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$

（2）由（1）可得

$$\cos 0.3=1-\frac{0.3^2}{2!}+\frac{0.3^4}{4!}-\frac{0.3^6}{6!}+\cdots+\frac{(-1)^n\times0.3^{2n}}{(2n)!}+\cdots$$

$$\approx1-\frac{0.3^2}{2!}+\frac{0.3^4}{4!}$$

$$=1-0.045+0.0003375=0.9553$$

（3）因为

$$\frac{\sin x}{x}=\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{n\pi}\right)\left(1+\frac{x}{n\pi}\right)\cdots$$

$$=\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)\cdots①,$$

对$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$，

两边求导可得：

$$-\sin x=-\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots,$$

所以$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots$，

所以$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-2}}{(2n-1)!}+\cdots$②，

比较①②中x^2的系数，可得：

$$-\frac{1}{3!}=-\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots\right),$$

所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$.

4 结语

泰勒公式与洛必达法则是连接初等与高等数学的桥梁，为高中导数难题提供新视角和高效工具。它们不取代传统分类讨论法，而是作为补充，让学生多一种思考路径，减少计算障碍。学生掌握这两种方法的关键在于理解“逼近”与“转化”的核心思想，并熟练运用麦克劳林展开式。应用时需根据问题特征灵活选择，必要时结合使用。教师教学中适度引入这些高等知识，可拓展学生视野，培养高阶思维，但也要强调使用前提和局限性，注重数学推理的严谨性。解答题中，鼓励学生以高中知识为基础书写，将高等工具作为辅助思考的“脚手架”。总之，深刻理解泰勒公式与洛必达法则的数学原理，学生方能在高中数学中应对自如。

参考文献

[1]白占强.等价无穷小量代换、洛必达法则与泰勒公式的应用比较[J].科技风,2025,(10):146-148.

[2]王万禹,张欢.泰勒公式在高中数学解题中的应用[J].理科爱好者,2024,(05):60-62.

[3]王燕国.泰勒公式在高中数学学习中的应用[J].高中生学习,2024,(11):85-87.

[4]包文涛.用洛必达法则求解高中函数问题的合理转换方法[J].高中数理化,2022,(13):68-69.