充水橡胶坝坝袋曲线坐标推导与数值解法

昌先健[1] 方朝阳[2]
1. 四川水发勘测设计研究有限公司 四川 成都 610072
2. 武汉大学水利水电学院 湖北 武汉 430072

摘 要：充水橡胶坝坝袋曲线坐标的推导，一直以来是通过椭圆积分方法进行的，该方法的推导过程复杂、繁琐。本文在两大假设的基本条件下，发现了离散方法可以得出较为准确的数值解，该数值解通过跟规范推荐值进行对比，误差在合理范围内，并且推导过程较简便，在橡胶坝研究的过程中可以减少花费在坝袋曲线坐标推导的时间和精力。

关键词：橡胶坝；曲线坐标；数值解法

1 问题的提出

充水橡胶坝的计算理论，最初是由捷克学者Jiri Kalir根据试验成果所建立的，目前国内研究在该理论基础公式上进行简化和变形时出现了抄写或编印偏差[1]，在推导过程中对某些细节的处理并不十分合理，以致于推导结果最终需借助复杂、繁琐的椭圆积分进行处理。

本文在尝试推导橡胶坝坐标参数的解析解时，发现了离散法可以避开繁琐的椭圆积分，并且还可以得出离散法对应的数值解，处理过程较椭圆积分法简单便捷。

2 基本假设

2.1 平面问题假设

中间坝段不受两端锚固影响，在相同的坝袋内水压力作用下，充水后可视为形状相同，锚固反力和水压力都垂直于坝轴线，且具有一定的分布形式，坝袋变形只发生在与坝轴线垂直的平面内。

2.2 薄膜内力假设

坝袋厚度相对于坝袋长度和曲率半径可以忽略不计，坝袋可以适应内外水压力而产生不同形状，该特性类似于薄膜，坝袋材料只能承受均匀拉力作用，而不能产生剪力和弯矩；忽略坝袋厚度和自重。

3 坝袋曲线坐标推导

坝袋充水后的形态如图1所示。*A*点为上游坝袋锚固点，*B*点为设计高度坝顶，*C*点为下游水位线与坝袋曲线交点，*D*点为下游坝袋锚固点。

坝袋受内外水压力共同作用。按照水压力荷载的叠加原理，上、下游水压力和内部水压力合成后的分布形式如图所示。上游*AB*段所受水压力呈矩形分布，方向为*x*轴负方向；下游*BC*段所受水压力呈梯形分布，方向为*x*轴正方向；下游*CD*段所受水压力呈矩形分布，方向为*x*轴正方向。*AD*段为坝袋贴地长度，在图中坐标系中分为上游*OA*段和下游*OD*段。

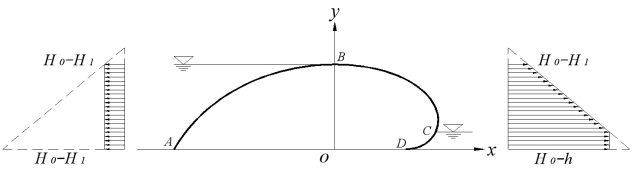

图1 坝袋断面曲线坐标计算示意图

按照假设，坝袋曲线上任意一点的内力均为*T*，方向均沿曲线的切线方向。如图2所示，*B*点处内力*T*的方向为*x*轴负方向，*D*点处内力*T*的方向为与*x*轴正方向成*θ*角。选择*x*轴方向进行受力分析$\sum F_x = 0$，有

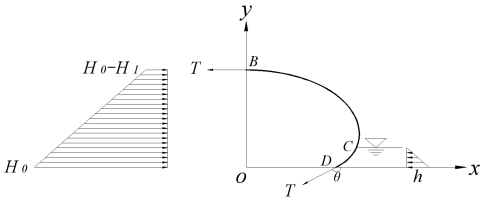

图2 坝袋断面内力计算示意图

$$T = \frac{2H_0H_1 - H_1^2 - h^2}{2(1-\cos\theta)}$$

压板锚固时$\theta = \pi$时，坝袋内力*T*取得最小值

$$T = \frac{2H_0H_1 - H_1^2 - h^2}{4}$$

（1）上游坝袋曲线*AB*段和*OA*段

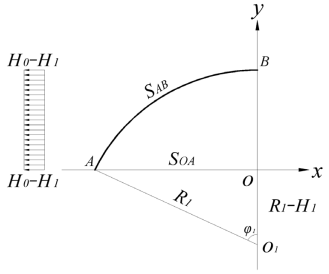

图3 上游坝袋曲线*AB*段和*OA*段

作者简介：昌先健（1991-），男，湖北孝昌人，四川水发勘测设计研究有限公司工程师，研究方向为水利水电工程建筑理论与应用。

如图3所示，上游坝袋曲线AB段内外水压力差为$p = H_0$-H_1，方向指向x轴负方向。根据薄膜理论，可以推得

$$R_1 = \frac{2H_0H_1 - H_1^2 - h^2}{4(H_0 - H_1)}$$

由几何关系

$$\cos\varphi_1 = \frac{3H_1^2 - 2H_0H_1 - h^2}{2H_0H_1 - H_1^2 - h^2}$$

$$\sin\varphi_1 = \sqrt{1-\cos^2\varphi_1} = \frac{2\sqrt{2(H_1^2 - h^2)(H_0H_1 - H_1^2)}}{2H_0H_1 - H_1^2 - h^2}$$

上游坝袋曲线AB段长度S_{AB}和OA段长度S_{OA}分别为

$$S_{AB} = \frac{2H_0H_1 - H_1^2 - h^2}{4(H_0 - H_1)}\arcsin\frac{2\sqrt{2(H_1^2 - h^2)(H_0H_1 - H_1^2)}}{2H_0H_1 - H_1^2 - h^2}$$

$$S_{OA} = \frac{\sqrt{2(H_1^2 - h^2)(H_0H_1 - H_1^2)}}{2(H_0 - H_1)}$$

（2）下游坝袋曲线BC段

如图4所示，下游坝袋曲线BC上任意一点$P(x,y)$，$h \leqslant y \leqslant H_1$，内外水压力差为$p = H_0$-$y$，方向指向$x$轴正方向。点$P$处的内力为$T$，方向为切线方向，与$x$轴正方向成$\theta_P$角。

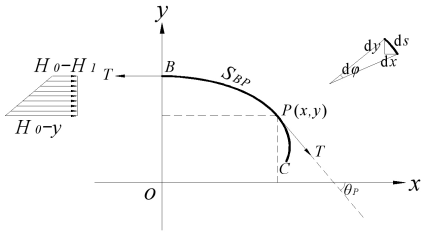

图4 下游坝袋曲线BC段

根据薄膜理论，有

$$R_P = \frac{2H_0H_1 - H_1^2 - h^2}{4(H_0 - y)}(h \leq y \leq H_1)$$

故下游坝袋曲线BC段为变曲率弧线。

由坝袋曲线BP段x轴方向的静力平衡方程，有

$$\sum F_x = T\cos\theta_P + \frac{1}{2}\cdot(H_1 - y)\cdot\left[(H_0 - y) + (H_0 - H_1)\right] - T = 0$$

化简，得

$$\cos\theta_P = \frac{(H_0^2 - h^2) - (H_0 - H_1)^2 - 2\left[(H_0 - y)^2 - (H_0 - H_1)^2\right]}{2H_0H_1 - H_1^2 - h^2}$$

$$\sin\theta_P = -\frac{2\sqrt{\left[(H_0^2 - h^2) - (H_0 - y)^2\right]\left[(H_0 - y)^2 - (H_0 - H_1)^2\right]}}{2H_0H_1 - H_1^2 - h^2}$$

根据解析几何对斜率的定义$k = \tan\theta_P = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$，有微分方程式

$$\mathrm{d}x = \frac{1}{\tan\theta_P}\mathrm{d}y = \frac{\cos\theta_P}{\sin\theta_P}\mathrm{d}y$$

令$a = (H_0^2$-$h^2)$、$b = (H_0$-$H_1)^2$、$\mathrm{t} = (H_0$-$y)^2$，得$t \in [(H_0$-$H_1)^2, (H_0$-$h)^2]$，则点P的横坐标

$$x = \int\frac{a - b - 2(t - b)}{4\sqrt{t(a - t)(t - b)}}\mathrm{d}t$$

该式理论上解析出来是一个关于变量t的函数关系式，里面包含一个常数项。由点B处的坐标初始条件$B(0,H_1)$，代入上式可求出常数项，从而确定一个下游BP段横坐标关于变量t的解析式，该式目前没有解析解，多采用数值解法处理。

BC段上任取一段弧长微元$\mathrm{d}s$，对应曲率半径为r，圆心角为$\mathrm{d}\varphi$，有几何关系式

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{r\sin\theta_P}\mathrm{d}y$$

同理，联立上式和$\sin\theta_p$解析式，有

$$\varphi = -2\arcsin\sqrt{\frac{(H_0 - y)^2 - (H_0 - H_1)^2}{(H_0^2 - h^2) - (H_0 - H_1)^2}} + C(h \leqslant y \leqslant H_1)$$

由此式可知，BC段微元弧对应的角度是一个变化值，随着纵坐标y的改变而变化。分析当P点与B点重合时，曲率半径可视为无穷大，则对应的圆心角为0，代入可以确定常数项$C = 0$。

由几何关系式，还可以求出曲线BP段弧长

$$S_{BP} = \frac{(2H_0H_1 - H_1^2 - h^2)}{4}\int\frac{1}{\sqrt{t\left[(H_0^2 - h^2) - t\right]\left[t - (H_0 - H_1)^2\right]}}\mathrm{d}t$$

该式解析出来是一个关于变量t的函数关系式，里面包含一个常数项，代入点B处的坐标初始条件$B(0,H_1)$，可求出常数项，从而得出BP段弧长关于变量t的解析式，再代入点C处的边界条件$y = h$，得

$$S_{BC} = \frac{(2H_0H_1 - H_1^2 - h^2)}{4}\int\frac{1}{\sqrt{t\left[(H_0^2 - h^2) - t\right]\left[t - (H_0 - H_1)^2\right]}}\mathrm{d}t\Bigg|_{t=(H_0-h)^2}$$

（3）下游坝袋曲线CD段和OD段

如图5所示，下游坝袋曲线CD段承受的水压力呈矩形分布，且内外水压力差为$p = H_0$-h，方向指向x轴正方向。

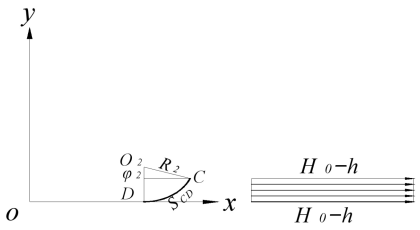

图5 下游坝袋曲线CD段和OD段

与*AB*段类似

$$R_2=\frac{2H_0H_1-H_1^2-h^2}{4(H_0-h)}$$

下游坝袋曲线*CD*段为一段圆弧，对应的圆心为O_2。记*C*点和*D*点处的横坐标分别为x_C和x_D，由几何关系得

$$\cos\varphi_2=\frac{2H_0H_1-H_1^2-4H_0h+3h^2}{2H_0H_1-H_1^2-h^2}$$

$$x_C-x_D=\sqrt{R_2^2-(R_2-h)^2}$$

则*CD*段长度S_{CD}和*OD*段长度S_{OD}分别为

$$S_{CD}=\frac{2H_0H_1-H_1^2-h^2}{4(H_0-h)}\arccos\frac{2H_0H_1-H_1^2-4H_0h+3h^2}{2H_0H_1-H_1^2-h^2}$$

$$x_C=\int\frac{(H_0^2-h^2)-(H_0-H_1)^2-2\left[t-(H_0-H_1)^2\right]}{4\sqrt{t\left[(H_0^2-h^2)-t\right]\left[t-(H_0-H_1)^2\right]}}\mathrm{d}t\Bigg|_{t=(H_0-h)^2}$$

$$S_{OD}=x_C-\sqrt{\frac{h(H_1-h)(2H_0-H_1-h)}{2(H_0-h)}}$$

4 理论推导与规范值的对比

本文拟选取设计坝高H_1 = 5.0m，下游无水，充水水头H_0 = 6.0m的情况进行对比，有：*AB*段圆弧半径R_1 = 8.75m，圆心O_1坐标(0,-3.75)；*BC*段上任意一点*P*(*x*,*y*)对应的微元弧半径R_P = 35/[4(6-*y*)]，对应的圆心角φ = 2arcsin{[(6-*y*)^2-1]/35}$^{0.5}$。

按照本文方法，将H_1 = 5.0m离散成20等份，Δ*y* = 0.25m，如图6所示。每等份的纵坐标为$y_i=H_1$-(*i*-1/2)Δ*y* = 5.125-0.25*i*(i = 1,2,⋯,20)；同理，将坝袋受到的梯形荷载也离散成20等份，$p_i=H_0-y_i$ = 0.875+0.25*i*(i = 1,2,⋯,20)，在每等份Δ*y*中按照圆弧进行计算，则$R_i=T/p_i$ = 8.75/(0.875+0.25*i*)(i = 1,2,⋯,20)，可逐段确定相应的圆心O_i，得出*BC*段坝袋曲线的坐标；通过查阅SL 227-98《橡胶坝技术规范》和GB/T 50979-2014《橡胶坝工程技术规范》，得到充压比α = 1.20的下游坝袋曲线数据，见表1。

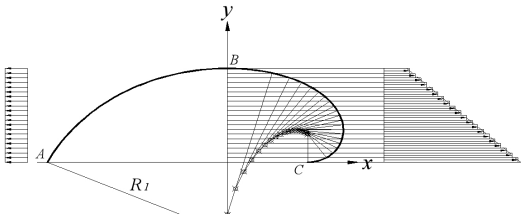

图6 橡胶坝坝袋曲线离散法计算示意图

表1 下游坝袋曲线坐标值及误差分析

y/H_1	x/H_1	*P*（规范值）		P_i（推导值）		相对误差（%）
		x（m）	*y*（m）	*x*（m）	*y*（m）	
1.000	0	0	5.000	0	5.000	0
0.950	0.407	2.035	4.750	1.956	4.750	3.88
0.900	0.560	2.801	4.500	2.718	4.500	2.96
0.850	0.668	3.341	4.250	3.255	4.250	2.57
0.800	0.751	3.757	4.000	3.67	4.000	2.32
0.750	0.818	4.090	3.750	4.003	3.750	2.13
0.700	0.872	4.361	3.500	4.273	3.500	2.02
0.650	0.917	4.583	3.250	4.495	3.250	1.92
0.600	0.953	4.764	3.000	4.675	3.000	1.87
0.550	0.982	4.908	2.750	4.819	2.750	1.81
0.500	1.004	5.019	2.500	4.93	2.500	1.77
0.450	1.020	5.100	2.250	5.01	2.250	1.76
0.400	1.030	5.150	2.000	5.061	2.000	1.73
0.350	1.034	5.172	1.750	5.082	1.750	1.74
0.300	1.032	5.162	1.500	5.073	1.500	1.72
0.250	1.024	5.120	1.250	5.031	1.250	1.74
0.200	1.008	5.041	1.000	4.951	1.000	1.79
0.150	0.983	4.917	0.750	4.827	0.750	1.83
0.100	0.946	4.731	0.500	4.64	0.500	1.92
0.050	0.888	4.441	0.250	4.35	0.250	2.05
0	0.724	3.622	0	3.524	0	2.71

由表1中曲线坐标规范值和推导值可以看出，推导值跟规范值之间的相对误差限在3.88%以内，说明本文理论推导的曲线比较准确，结果误差在合理范围内。

5 结论

本文的理论推导值跟规范推荐值进行对比，可以确定离散法处理曲线坐标积分关系式是可行的，避免了椭圆积分的繁琐计算，减小了运算量，节省了时间和精力。

参考文献

[1]昌先健.2016.橡胶坝充水和蓄水过程数值模拟研究[D]：[硕士].武汉：武汉大学.